Superficie di del Pezzo e gruppi di Lie semi-semplici

Alexei Skorobogatov

Imperial College London

Gargnano, Maggio 2010

Si può fingere di parlare una lingua? (Jacques Derrida)

Gruppi di Lie semi-semplici

In questa esposizione k è un campo di caratteristica 0 algebricamente chiuso.

Sia G un gruppo di Lie semi-semplice semplicemente connesso su k, con il sistema di radici di tipo A_n, D_n, E_n.
$G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile di G su V, $\dim(V) < \infty$.

Gruppi di Lie semi-semplici

In questa esposizione k è un campo di caratteristica 0 algebricamente chiuso.

Sia G un gruppo di Lie semi-semplice semplicemente connesso su k, con il sistema di radici di tipo A_n, D_n, E_n.
$G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile di G su V, $\dim(V) < \infty$.

Fissiamo un sottogruppo di Borel $B \subset G$ (un sottogruppo massimale risolvibile conesso; B è unico a meno di cognugio).
Quindi esiste un spazio unico di dimensione uno $kv \subset V$ fissato da B, cioè $Bv = kv$. Un tale v viene chiamato il *vettore di più alto peso* di V.

In questa esposizione k è un campo di caratteristica 0 algebricamente chiuso.

Sia G un gruppo di Lie semi-semplice semplicemente connesso su k, con il sistema di radici di tipo A_n, D_n, E_n. $G \to \mathrm{GL}(V)$ una rappresentazione irriducibile di G su V, $\dim(V) < \infty$.

Fissiamo un sottogruppo di Borel $B \subset G$ (un sottogruppo massimale risolvibile conesso; B è unico a meno di cognugio). Quindi esiste un spazio unico di dimensione uno $kv \subset V$ fissato da B, cioè $Bv = kv$. Un tale v viene chiamato il *vettore di più alto peso* di V.
Lo stabilizzante di kv è un sottogruppo parabolico $P \subset G$, $B \subset P$. L'orbita di v nello spazio proiettivo $G/P \subset \mathbf{P}(V)$ è una sottovarietà chiusa (infatti, l'unica G-orbita chiusa).

Esempio:

$G = \mathrm{SL}(n)$ di tipo A_{n-1}, $V = \wedge^m(k^n)$, dove $1 \leq m \leq n$,
$G/P = \mathrm{Gr}(m, n) \subset \mathbf{P}(V)$.

Esempio:

$G = \mathrm{SL}(n)$ di tipo A_{n-1}, $V = \wedge^m(k^n)$, dove $1 \leq m \leq n$,
$G/P = \mathrm{Gr}(m,n) \subset \mathbf{P}(V)$.

Sia $H \subset G$ un toro massimale (=un sottogruppo di Cartan, H è unico a meno di cognugio),
$\widehat{H} = \mathrm{Hom}(H, k^*)$ è il gruppo di caratteri di H.
Il *rango* di G è definito come $\dim(H)$.

Dunque, otteniamo una decomposizione

$$V = \bigoplus_{\chi \in \widehat{H}} V_\chi,$$

dove $V_\chi = \{u \in V \mid h.u = \chi(h)u \text{ per ogni } h \in H\}$ è l'autospazio di peso χ.

I caratteri χ tali che $V_\chi \neq 0$ sono chiamati *i pesi* di V.

Esempio: la rappresentazione aggiunta

Sia $V = \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algebra di Lie di G, cioè lo spazio tangente a l'elemento neutrale $e \in G$, con l'azione di G proveniente dall'azione di G su G per coniugazione: $g \mapsto gxg^{-1}$. Questa rappresentazione di $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ viene chiamata *la rappresentazione aggiunta*. Abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1.$$

L'insieme di pesi non-zero $R \subset \widehat{H}$ di $\mathfrak{g}$ è *il sistema di radici* di G, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{g}_0$ (l'autospazio di peso 0) è l'algebra di Lie di H.

Se dice che G è di tipo R.

Una base di R è un sottoinsieme $\Delta \subset R$ tale che ogni radice $\beta \in R$ può essere scritta

$$\beta = \sum_{\gamma \in R} n_\gamma(\beta)\,\gamma, \quad n_\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$$

dove tutti i coefficienti $n_\alpha \neq 0$ hanno il stesso segno, cioè tutti sono positivi o tutti sono negativi. Per ogni sistema di radici R fissiamo una base $\Delta \subset R$.

$|\Delta|$ è uguale al rango di G. Scriviamo $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Qui $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vengono chiamati *le radici semplici*.

Una base di R è un sottoinsieme $\Delta \subset R$ tale che ogni radice $\beta \in R$ può essere scritta

$$\beta = \sum_{\gamma \in R} n_\gamma(\beta)\,\gamma, \quad n_\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$$

dove tutti i coefficienti $n_\alpha \neq 0$ hanno il stesso segno, cioè tutti sono positivi o tutti sono negativi. Per ogni sistema di radici R fissiamo una base $\Delta \subset R$.

$|\Delta|$ è uguale al rango di G. Scriviamo $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Qui $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vengono chiamati *le radici semplici*.

La diagramma de Dynkin de R è definita così:

- i vertici corrispondano alle radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,
- $\alpha \neq \alpha'$ **non** sono connessi se e solo se $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\alpha'}] = 0$.

Sia (R, α_i) una coppia, dove R è una sistema di radici ed α una radice semplice. Possiamo associare alla coppia (R, α_i) una rappresentazione irriducibile detta *fondamentale* V di G, tale che l'orbita del vettore di più alto peso è $G/P \subset \mathbf{P}(V)$, dove l'algebra di Lie di P si definisce come il seguente:

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R,\ n_\alpha(\beta) > 0} \mathfrak{g}_\beta.$$

Questo modo si ottengono tutti i sottogruppi parabolici massimali. Gli spazi omogenei G/P sono generalizzazione di Grassmanniana $\mathrm{Gr}(m, n)$.

In tutto il seguito V sarà una rappresentazione fondamentale associata a (R, α_i).

Sia (R, α_i) una coppia, dove R è una sistema di radici ed α una radice semplice. Possiamo associare alla coppia (R, α_i) una rappresentazione irriducibile detta *fondamentale* V di G, tale che l'orbita del vettore di più alto peso è $G/P \subset \mathbf{P}(V)$, dove l'algebra di Lie di P si definisce come il seguente:

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R,\ n_\alpha(\beta) > 0} \mathfrak{g}_\beta.$$

Questo modo si ottengono tutti i sottogruppi parabolici massimali. Gli spazi omogenei G/P sono generalizzazione di Grassmanniana $\mathrm{Gr}(m, n)$.

In tutto il seguito V sarà una rappresentazione fondamentale associata a (R, α_i).

Definizione. Se $\dim(V_\chi) = 1$ per ogni $V_\chi \neq 0$, allora V viene chiamata *una rappresentazione minuscola*.

Classificazione: Tutte le rappresentazioni minuscole di tipo A, D, E sono le rappresentazioni fondamentali associate alle coppie (R, α_i) seguenti:

- (A_{n-1}, α_m), $1 \leq m \leq n-1$: le rappresentazioni di $\mathrm{SL}(n)$ su $\wedge^m(k^n)$ come sopra;

Classificazione: Tutte le rappresentazioni minuscole di tipo A, D, E sono le rappresentazioni fondamentali associate alle coppie (R, α_i) seguenti:

- (A_{n-1}, α_m), $1 \leq m \leq n-1$: le rappresentazioni di $\mathrm{SL}(n)$ su $\wedge^m(k^n)$ come sopra;
- (D_n, α_1): la rappresentazione abituale di $\mathrm{SO}(2n)$ di $\dim = 2n$;

Classificazione: Tutte le rappresentazioni minuscole di tipo A, D, E sono le rappresentazioni fondamentali associate alle coppie (R, α_i) seguenti:

- (A_{n-1}, α_m), $1 \leq m \leq n-1$: le rappresentazioni di $\mathrm{SL}(n)$ su $\wedge^m(k^n)$ come sopra;
- (D_n, α_1): la rappresentazione abituale di $\mathrm{SO}(2n)$ di $\dim = 2n$;
- (D_n, α_n), (D_n, α_{n-1}): le rappresentazioni duali semi-spinor di $\mathrm{Spin}(2n)$ di $\dim = 2^{n-1}$;

$\mathrm{Spin}(2n)$ è il gruppo di Lie semi-semplice semplicemente connesso di tipo D_n, cioè il ricoprimento doppio di $\mathrm{SO}(2n)$.

Classificazione: Tutte le rappresentazioni minuscole di tipo A, D, E sono le rappresentazioni fondamentali associate alle coppie (R, α_i) seguenti:

- (A_{n-1}, α_m), $1 \le m \le n-1$: le rappresentazioni di $\mathrm{SL}(n)$ su $\wedge^m(k^n)$ come sopra;
- (D_n, α_1): la rappresentazione abituale di $\mathrm{SO}(2n)$ di $\dim = 2n$;
- (D_n, α_n), (D_n, α_{n-1}): le rappresentazioni duali semi-spinor di $\mathrm{Spin}(2n)$ di $\dim = 2^{n-1}$;
- (E_6, α_1), (E_6, α_6): le rappresentazioni duali di $\dim = 27$;

$\mathrm{Spin}(2n)$ è il gruppo di Lie semi-semplice semplicemente connesso di tipo D_n, cioè il ricoprimento doppio di $\mathrm{SO}(2n)$.

Classificazione: Tutte le rappresentazioni minuscole di tipo A, D, E sono le rappresentazioni fondamentali associate alle coppie (R, α_i) seguenti:

- (A_{n-1}, α_m), $1 \leq m \leq n-1$: le rappresentazioni di $\mathrm{SL}(n)$ su $\wedge^m(k^n)$ come sopra;
- (D_n, α_1): la rappresentazione abituale di $\mathrm{SO}(2n)$ di $\dim = 2n$;
- (D_n, α_n), (D_n, α_{n-1}): le rappresentazioni duali semi-spinor di $\mathrm{Spin}(2n)$ di $\dim = 2^{n-1}$;
- (E_6, α_1), (E_6, α_6): le rappresentazioni duali di $\dim = 27$;
- (E_7, α_7): la rappresentazione auto-duale di $\dim = 56$.

$\mathrm{Spin}(2n)$ è il gruppo di Lie semi-semplice semplicemente connesso di tipo D_n, cioè il ricoprimento doppio di $\mathrm{SO}(2n)$.

Inoltre, quelle rappresentazioni sono incorporate una in un'altra come questo:

$(56\text{-}\dim E_7) \supset (27\text{-}\dim E_6) \supset (16\text{-}\dim D_5) \supset (10\text{-}\dim A_4)$

Inoltre, quelle rappresentazioni sono incorporate una in un'altra come questo:

$(56-\dim E_7) \supset (27-\dim E_6) \supset (16-\dim D_5) \supset (10-\dim A_4)$

Più precisamente, sia $R(P)$ il radicale di P (=il sottogruppo massimale normale che è *risolvibile* e conesso).

Inoltre, quelle rappresentazioni sono incorporate una in un'altra come questo:

$(56-\dim E_7) \supset (27-\dim E_6) \supset (16-\dim D_5) \supset (10-\dim A_4)$

Più precisamente, sia $R(P)$ il radicale di P (=il sottogruppo massimale normale che è *risolvibile* e conesso).

Quindi, P contiene un sottogruppo semi-semplice G', unico a meno di cognugio, tale che $P = R(P).G'$, dove $R(P) \cap G'$ è finito (la decomposizione di Levi, secondo Eugenio Elia Levi, un fratello minore di Beppo Levi).

Nel nostro caso G' è di tipo "antecedente", cioè, se G è di tipo E_7, allora $G' \subset G$ è di tipo E_6; poi partendo dal tipo E_6 otteniamo D_5; partendo da D_5 otteniamo A_4; e partendo da A_4 otteniamo $A_1 \times A_2$:

$$\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(3) \subset \mathrm{SL}(5) \subset \mathrm{SO}(10) \subset \dots$$

La rappresentazione minuscola di G' si trova come una componente irreducibile della restrizione della rappresentazione minuscola di G su G'. Questi sono le dimensioni delle componenti irriducibili della restrizione di V a G':

La rappresentazione minuscola di G' si trova come una componente irreducibile della restrizione della rappresentazione minuscola di G su G'. Questi sono le dimensioni delle componenti irriducibili della restrizione di V a G':

$$\begin{array}{lrcl} (E_7, \alpha_7) & 56 & = & 1 + 27 + 27 + 1 \\ (E_6, \alpha_6) & 27 & = & 1 + 16 + 10 \\ (D_5, \alpha_5) & 16 & = & 1 + 10 + 5 \\ (A_4, \alpha_3) & 10 & = & 1 + 6 + 3 \end{array}$$

La rappresentazione minuscola di G' si trova come una componente irreducibile della restrizione della rappresentazione minuscola di G su G'. Questi sono le dimensioni delle componenti irriducibili della restrizione di V a G':

$$\begin{array}{lccl} (E_7, \alpha_7) & 56 & = & 1 + 27 + 27 + 1 \\ (E_6, \alpha_6) & 27 & = & 1 + 16 + 10 \\ (D_5, \alpha_5) & 16 & = & 1 + 10 + 5 \\ (A_4, \alpha_3) & 10 & = & 1 + 6 + 3 \end{array}$$

Notiamo che in questo modo si può incorporare la rappresentazione di dim 56 di E_7 nella rappresentazione aggiunta di E_8, che ha dimensione $248 = 240 + 8$ (è quasi-minuscola: 240 radici + sottogruppo di Cartan=autospazio di peso 0 di dim 8):

$$248 = 1 + 56 + (1 + 133) + 56 + 1, \quad 133 = \dim E_7.$$

Classicamente, una superficie nonsingolare X di grado n nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ su k viene chiamata una superficie di del Pezzo (secondo Pasquale del Pezzo, Duca di Cajanello, sindaco di Napoli e senatore del Regno d'Italia). Qui n è un numero tra 3 e 9.

Classicamente, una superficie nonsingolare X di grado n nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ su k viene chiamata una superficie di del Pezzo (secondo Pasquale del Pezzo, Duca di Cajanello, sindaco di Napoli e senatore del Regno d'Italia). Qui n è un numero tra 3 e 9.

Quando $n = 3$, per esempio, X è una superficie cubica in $\mathbf{P}^3$ nella quale sono contenute le 27 rette $\mathbf{P}^1$. Si può ottenere questa superficie come $\mathbf{P}^2$ scoppiato in sei punti tali che non esistono una retta tra tre punti e una conica tra tutti i sei punti.

Quando $n = 4$, X è l'intersezione complessa di due quadriche.

Più generalmente, si possono definire le superficie di del Pezzo come le varietà di Fano di dimensione 2, cioè le superficie X tali che la classe anti-canonica $-K_X$ è ampia.
Il grado di X si definisce come l'indice d'intersezione (K_X^2), uguale a un numero tra 1 e 9.

Equivalentemente, una superfice di del Pezzo di grado d è il piano proiettivo scoppiato in $r = 9 - d$ punti in posizione generale. Quindi $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}^{r+1}$.

Più generalmente, si possono definire le superficie di del Pezzo come le varietà di Fano di dimensione 2, cioè le superficie X tali che la classe anti-canonica $-K_X$ è ampia.
Il grado di X si definisce come l'indice d'intersezione (K_X^2), uguale a un numero tra 1 e 9.

Equivalentemente, una superfice di del Pezzo di grado d è il piano proiettivo scoppiato in $r = 9 - d$ punti in posizione generale. Quindi $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}^{r+1}$.

Se C è una curva su X, il grado di C si definisce come $(C. - K_X)$. In questo senso le rette su X sono le curve di grado 1, le coniche le curve di grado 2, etc.

Sia $G \to \mathrm{GL}(V)$ la rappresentazione minuscola del gruppo semi-semplice di rango r di tipo

$$(A_4, \alpha_2),\ (D_5, \alpha_5),\ (E_6, \alpha_6),\ (E_7, \alpha_7).$$

Ricordiamo che $H \subset G$ è un toro massimale, dim $(H) = r$. Sia $T \subset \mathrm{GL}(V)$ il toro generato da H ed il gruppo di scalari $k^* \subset \mathrm{GL}(V)$. Abbiamo $\widehat{T} = \mathbf{Z}^{r+1}$.

Sia $G \to \mathrm{GL}(V)$ la rappresentazione minuscola del gruppo semi-semplice di rango r di tipo

$$(A_4, \alpha_2),\ (D_5, \alpha_5),\ (E_6, \alpha_6),\ (E_7, \alpha_7).$$

Ricordiamo che $H \subset G$ è un toro massimale, dim $(H) = r$. Sia $T \subset \mathrm{GL}(V)$ il toro generato da H ed il gruppo di scalari $k^* \subset \mathrm{GL}(V)$. Abbiamo $\widehat{T} = \mathbf{Z}^{r+1}$.

Esiste un isomorfismo $\widehat{T} \cong \mathrm{Pic}(X)$ tale che

- il carattere $T \to T/H = k^*$ corrisponde a $-K_X \in Pic(X)$;
- le radici (= i pesi della rappresentazione aggiunta di G) corrispondono alle classi $C \in \mathrm{Pic}(X)$ tali che $(C^2) = -2$, $(C.K_X) = 0$; $X - - - - > R$

Sia $G \to \mathrm{GL}(V)$ la rappresentazione minuscola del gruppo semi-semplice di rango r di tipo

$$(A_4, \alpha_2),\ (D_5, \alpha_5),\ (E_6, \alpha_6),\ (E_7, \alpha_7).$$

Ricordiamo che $H \subset G$ è un toro massimale, dim $(H) = r$. Sia $T \subset \mathrm{GL}(V)$ il toro generato da H ed il gruppo di scalari $k^* \subset \mathrm{GL}(V)$. Abbiamo $\widehat{T} = \mathbf{Z}^{r+1}$.

Esiste un isomorfismo $\widehat{T} \cong \mathrm{Pic}(X)$ tale che

- il carattere $T \to T/H = k^*$ corrisponde a $-K_X \in Pic(X)$;
- le radici (= i pesi della rappresentazione aggiunta di G) corrispondono alle classi $C \in \mathrm{Pic}(X)$ tali che $(C^2) = -2$, $(C.K_X) = 0$; $X - - - - > R$
- i pesi della rappresentazione V corrispondono alle classe delle rette $\mathbf{P}^1 \subset X$, cioè le classi $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $(L^2) = (L.K_X) = -1$. $X - - - - > \alpha_i$.

il grado d di X	6	5	4	3	2	1
il sistema di radici R	$A_1 \times A_2$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$\#\{\mathbf{P}^1 \subset X\}$	6	10	16	27	56	240

Osservazione banale: La superficie di del Pezzo X di grado d può essere ottenuta come $X = \mathrm{Bl}_M(X')$, dove X' è una superficie di del Pezzo di grado $d+1$, e $M \in X'$ non contenuto nelle rette di X'.

il grado d di X	6	5	4	3	2	1
il sistema di radici R	$A_1 \times A_2$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$\#\{\mathbf{P}^1 \subset X\}$	6	10	16	27	56	240

Osservazione banale: La superficie di del Pezzo X di grado d può essere ottenuta come $X = \mathrm{Bl}_M(X')$, dove X' è una superficie di del Pezzo di grado $d+1$, e $M \in X'$ non contenuto nelle rette di X'.

il grado d di X	6	5	4	3	2	1
il sistema di radici R	$A_1 \times A_2$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$\#\{\mathbf{P}^1 \subset X\}$	6	10	16	27	56	240

Osservazione banale: La superficie di del Pezzo X di grado d può essere ottenuta come $X = \mathrm{Bl}_M(X')$, dove X' è una superficie di del Pezzo di grado $d+1$, e $M \in X'$ non contenuto nelle rette di X'.

Le rette di X= (il divisore eccezionale)$\cup$(le rette su X')$\cup$
(le transformazione proprie delle coniche su X' passate per M)
$\cup \dots$

il grado d di X	6	5	4	3	2	1
il sistema di radici R	$A_1 \times A_2$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$\#\{\mathbf{P}^1 \subset X\}$	6	10	16	27	56	240

Osservazione banale: La superficie di del Pezzo X di grado d può essere ottenuta come $X = \mathrm{Bl}_M(X')$, dove X' è una superficie di del Pezzo di grado $d+1$, e $M \in X'$ non contenuto nelle rette di X'.

Le rette di X= (il divisore eccezionale)$\cup$(le rette su X')$\cup$ (le transformazione proprie delle coniche su X' passate per M) $\cup \dots$

$$\begin{aligned} 56 &= 1+27+27+1 \\ 27 &= 1+16+10 \\ 16 &= 1+10+5 \\ 10 &= 1+6+3 \end{aligned}$$

La stessa numerologia!

Domanda fondamentale:

Esiste un rapporto geometrico tra le superficie di del Pezzo di grado d e la rappresentazione minuscola V del gruppo di Lie semi-semplice G di rango $r = 9 - d$ tale che

$$\dim(V) = \#\{\mathbf{P}^1 \subset X\} \text{ ?}$$

Come costruire una superficie di del Pezzo di grado d da $G/P \subset \mathbf{P}(V)$?

Domanda fondamentale:

Esiste un rapporto geometrico tra le superficie di del Pezzo di grado d e la rappresentazione minuscola V del gruppo di Lie semi-semplice G di rango $r = 9 - d$ tale che

$$\dim(V) = \#\{\mathbf{P}^1 \subset X\} \ ?$$

Come costruire una superficie di del Pezzo di grado d da $G/P \subset \mathbf{P}(V)$?

La risposta nel caso di grado 5 non è complicata.

La ragione filosofica: a meno di isomorfismo, su un campo algebricamente chiuso esiste una sola superficie di del Pezzo di grado 5, cioè $\mathbf{P}^2$ scoppiato in

$$(1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:1).$$

Esempio:
$d = 5$, $r = 4$, $G = \mathrm{SL}(5)$ di tipo A_4, $V = \wedge^2(k^5)$,
$G/P = \mathrm{Gr}(2,5)$, $T \subset \mathrm{GL}(5)$ è il gruppo di matrici diagonali.

Esempio:
$d = 5$, $r = 4$, $G = \mathrm{SL}(5)$ di tipo A_4, $V = \wedge^2(k^5)$,
$G/P = \mathrm{Gr}(2,5)$, $T \subset \mathrm{GL}(5)$ è il gruppo di matrici diagonali.

Sia $\mathrm{Gr}(2,5)_a \subset V$ il cono affine su $\mathrm{Gr}(2,5)$, e sia $Y \subset \mathrm{Gr}(2,5)_a$ il sottoinsieme aperto sul quale T agisce liberamente.

Esempio:
$d = 5$, $r = 4$, $G = \mathrm{SL}(5)$ di tipo A_4, $V = \wedge^2(k^5)$,
$G/P = \mathrm{Gr}(2,5)$, $T \subset \mathrm{GL}(5)$ è il gruppo di matrici diagonali.

Sia $\mathrm{Gr}(2,5)_a \subset V$ il cono affine su $\mathrm{Gr}(2,5)$, e sia $Y \subset \mathrm{Gr}(2,5)_a$ il sottoinsieme aperto sul quale T agisce liberamente.

Teorema 1
$X = Y/T$ è una superficie di del Pezzo di grado 5.
Per di più, i divisori $Y \cap \mathrm{Ker}(V \to V_\chi)$, che sono zeri delle coordinate di Plücker, si proiettano sulle 10 rette dentro X.

Esempio:
$d = 5$, $r = 4$, $G = \mathrm{SL}(5)$ di tipo A_4, $V = \wedge^2(k^5)$,
$G/P = \mathrm{Gr}(2,5)$, $T \subset \mathrm{GL}(5)$ è il gruppo di matrici diagonali.

Sia $\mathrm{Gr}(2,5)_a \subset V$ il cono affine su $\mathrm{Gr}(2,5)$, e sia $Y \subset \mathrm{Gr}(2,5)_a$ il sottoinsieme aperto sul quale T agisce liberamente.

Teorema 1
$X = Y/T$ è una superficie di del Pezzo di grado 5.
Per di più, i divisori $Y \cap \mathrm{Ker}(V \to V_\chi)$, che sono zeri delle coordinate di Plücker, si proiettano sulle 10 rette dentro X.

Questo è bello, ma non funziona in grado $d \leq 4$, perchè le superficie di del Pezzo di questo grado ammettono spazi di moduli, quindi non può esistere un'equivalenza come nel caso di grado 5. Inoltre, $\dim(G/P) - \dim(H) > 2$ è troppo grande.

Notiamo che in caso $d = 5$ la proiezione $p : Y \to X$ è un torsore, cioè localmente per la topologia di Zariski su X, $Y \to X$ è isomorfo a un prodotto diretto $X \times T \to X$.

Notiamo che in caso $d = 5$ la proiezione $p : Y \to X$ è un torsore, cioè localmente per la topologia di Zariski su X, $Y \to X$ è isomorfo a un prodotto diretto $X \times T \to X$.

In generale, se $Y \to X$ è un torsore di T, per ogni carattere $\chi : T \to k^*$ il quoziente $Y/\mathrm{Ker}(\chi)$ è un X-torsore di k^*, quindi

$$Y/\mathrm{Ker}(\chi) = \mathcal{L} \setminus \{\text{sezione nulla}\},$$

per qualche fibrato in rette $\mathcal{L} \to X$.

Notiamo che in caso $d = 5$ la proiezione $p : Y \to X$ è un torsore, cioè localmente per la topologia di Zariski su X, $Y \to X$ è isomorfo a un prodotto diretto $X \times T \to X$.

In generale, se $Y \to X$ è un torsore di T, per ogni carattere $\chi : T \to k^*$ il quoziente $Y/\mathrm{Ker}(\chi)$ è un X-torsore di k^*, quindi

$$Y/\mathrm{Ker}(\chi) = \mathcal{L} \setminus \{\text{sezione nulla}\},$$

per qualche fibrato in rette $\mathcal{L} \to X$.

Definizione. $Y \to X$ è un torsore *universale* si la funzione

$$\tau : \hat{T} \to \mathrm{Pic}(X), \quad \chi \mapsto \mathcal{L},$$

è un isomorfismo.

Se X è una varietà proiettiva liscia tale che $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$, allora un morfismo $p : Y \to X$ è un torsore universale se

- $Y \to X$ è localmente isomorfo a $X \times T \to X$ per un toro T,

Se X è una varietà proiettiva liscia tale che $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$, allora un morfismo $p : Y \to X$ è un torsore universale se

- $Y \to X$ è localmente isomorfo a $X \times T \to X$ per un toro T,
- $\mathrm{Pic}(Y) = 0$,

Se X è una varietà proiettiva liscia tale che $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$, allora un morfismo $p : Y \to X$ è un torsore universale se

- $Y \to X$ è localmente isomorfo a $X \times T \to X$ per un toro T,
- $\mathrm{Pic}(Y) = 0$,
- ogni funzione $Y \to k^*$ è costante.

Se X è una varietà proiettiva liscia tale che $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$, allora un morfismo $p : Y \to X$ è un torsore universale se

- $Y \to X$ è localmente isomorfo a $X \times T \to X$ per un toro T,
- $\mathrm{Pic}(Y) = 0$,
- ogni funzione $Y \to k^*$ è costante.

Un esempio semplicissimo di torsore universale è questo: $\mathbf{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$. In generale, se $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$ sono i fibrati in rette su X tali che $\mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z}\mathcal{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}\mathcal{L}_m$, allora

$$Y = \mathcal{L}_1 \setminus \{\text{sezione nulla}\}) \times_{\mathrm{X}} \ldots \times_{\mathrm{X}} \mathcal{L}_{\mathrm{m}} \setminus \{\text{sezione nulla}\})$$

è un torsore universale.

Se X è una varietà proiettiva liscia tale che $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}) = 0$, allora un morfismo $p : Y \to X$ è un torsore universale se

- $Y \to X$ è localmente isomorfo a $X \times T \to X$ per un toro T,
- $\mathrm{Pic}(Y) = 0$,
- ogni funzione $Y \to k^*$ è costante.

Un esempio semplicissimo di torsore universale è questo: $\mathbf{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$. In generale, se $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$ sono i fibrati in rette su X tali che $\mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z}\mathcal{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}\mathcal{L}_m$, allora

$$Y = \mathcal{L}_1 \setminus \{\text{sezione nulla}\}) \times_{\mathrm{X}} \ldots \times_{\mathrm{X}} \mathcal{L}_{\mathrm{m}} \setminus \{\text{sezione nulla}\})$$

è un torsore universale.

Sia $p : Y \to X$ un torsore universale su X, e sia $k[Y]$ la k-algebra di funzioni regolari $Y \to k$.

La rappresentazione di T su $k[Y]$ è una somma diretta di autospazi

$$k[Y]_\chi = \{f : Y \to k \mid f(tx) = \chi(t)f(x) \text{ per ogni } t \in T\}.$$

Quindi $k[Y]$ è l'anello graduato dal gruppo $\widehat{T}$:

$$k[Y] = \bigoplus_{\chi \in \hat{T}} k[Y]_\chi.$$

Sia $f \in k[Y]_\chi$. Poichè $\mathrm{div}(f)$ è invariante su T, abbiamo $\mathrm{div}(f) = p^*(D)$, dove $D \subset X$ è un divisore. E facile vedere che $[D] = \tau(\chi)$, dove

$$\tau : \widehat{T} \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

è l'isomorfismo come sopra, a meno di segno.

Risulta allora:

$$k[Y]_\chi = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(D)),$$

quindi

$$k[Y] = \bigoplus_{D \in \mathrm{Pic}(X)} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(D)).$$

Un tale anello si chiama *l'anello di Cox* di X, ovvero l'anello coordinato totale di X.

Generalmente, è un problema interessante se Cox(X) è finitamente generato. In questo caso X è un "Mori dream space" (Hu–Keel).

Per esempio, Cox(X) è finitamente generato nei seguenti casi:

- X è una varietà di Fano (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan);

Per esempio, $\mathrm{Cox}(X)$ è finitamente generato nei seguenti casi:

- X è una varietà di Fano (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan);
- X è una varietà torica (D. Cox), allora $\mathrm{Cox}(X) = k[x_1, \dots, x_n]$;

Per esempio, $\mathrm{Cox}(X)$ è finitamente generato nei seguenti casi:

- X è una varietà di Fano (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan);
- X è una varietà torica (D. Cox), allora $\mathrm{Cox}(X) = k[x_1, \ldots, x_n]$;
- $X = \mathrm{Bl}_{P_1,\ldots,P_r}\mathbf{P}^n$, dove $P_1, \ldots, P_r$ sono $r \geq n+3$ punti contenuti in una curva normale razionale dentro $\mathbf{P}^n$ (Castravet–Tevelev).

Per esempio, Cox(X) è finitamente generato nei seguenti casi:

- X è una varietà di Fano (Birkar-Cascini-Hacon-McKernan);
- X è una varietà torica (D. Cox), allora Cox$(X) = k[x_1, \dots, x_n]$;
- $X = \mathrm{Bl}_{P_1,\dots,P_r}\mathbf{P}^\mathbf{n}$, dove $P_1, \dots, P_r$ sono $r \geq n + 3$ punti contenuti in una curva normale razionale dentro $\mathbf{P}^\mathbf{n}$ (Castravet–Tevelev).

Ma l'anello di Cox di $\mathbf{P}^2$ scoppiato in 9 punti in posizione generale non è finitamente generato.

Domanda aperta: È Cox$(\overline{M_{0,n}})$ finitamente generato? (Si, se $n \leq 6$.)

Sia V una rappresentazione fondamentale di G associata a (R, α_i), e sia $(G/P)_a \subset V$ il cono affine.

Definizione $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ è il sottoinsieme di punti $x \in (G/P)_a$ tali che

- l'orbita $Hx \subset V$ è chiusa ("stabilità"),

Sia V una rappresentazione fondamentale di G associata a (R, α_i), e sia $(G/P)_a \subset V$ il cono affine.

Definizione $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ è il sottoinsieme di punti $x \in (G/P)_a$ tali che

- l'orbita $Hx \subset V$ è chiusa ("stabilità"),
- $T \to Tx$ è un isomorfismo ("l'azione è libera").

Sia V una rappresentazione fondamentale di G associata a (R, α_i), e sia $(G/P)_a \subset V$ il cono affine.

Definizione $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ è il sottoinsieme di punti $x \in (G/P)_a$ tali che

- l'orbita $Hx \subset V$ è chiusa ("stabilità"),
- $T \to Tx$ è un isomorfismo ("l'azione è libera").

Notiamo che secondo la teoria geometrica di invarianti (GIT) il quoziente $Z = T\backslash(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ esiste, e il morfismo $(G/P)_a^{\mathrm{sf}} \to Z$ è un torsore di T.

Sia V una rappresentazione fondamentale di G associata a (R, α_i), e sia $(G/P)_a \subset V$ il cono affine.

Definizione $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ è il sottoinsieme di punti $x \in (G/P)_a$ tali che

- l'orbita $Hx \subset V$ è chiusa ("stabilità"),
- $T \to Tx$ è un isomorfismo ("l'azione è libera").

Notiamo che secondo la teoria geometrica di invarianti (GIT) il quoziente $Z = T\backslash(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ esiste, e il morfismo $(G/P)_a^{\mathrm{sf}} \to Z$ è un torsore di T.

Proposizione Se (R, α_i) **non** appartiene alla lista seguenta:

$$(R, \alpha_1),\ (A_n, \alpha_n),\ (A_3, \alpha_2),\ (D_4, \alpha_3),\ (D_4, \alpha_4),$$

allora $(G/P)_a^{\mathrm{sf}} \to Z$ è un torsore universale. Abbiamo

$$\mathrm{Aut}(Z) = W(R) \rtimes \mathrm{Aut}(\Delta, \alpha_i).$$

Qui $W(R)$ è il gruppo di Weyl, ed $\mathrm{Aut}(\Delta, \alpha_i)$ è il gruppo di automorfismi del diagramma di Dynkin di R che lasciano invariante α_i.

Se $(R, \alpha_i) = (A_4, \alpha_2)$ abbiamo $G/P = \mathrm{Gr}(2,5)$, e qui Z è una superficie di del Pezzo di grado 5. Il è ben noto che $\mathrm{Aut}(Z) = S_5 = W(A_4)$.

Anche, se $(R, \alpha_i) = (A_5, \alpha_2)$ abbiamo $G/P = \mathrm{Gr}(2,6)$, e qui Z è l'insieme di punti lisci della cubica di Segre

$$\sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} x_i^3 = 0.$$

Dalla Proposizione si diduce una classica teorema di Enriques:

Sia F un campo di car. 0. Ogni superficie liscia X di grado 5 in $\mathbf{P}_F^5$ ha un punto razionale, cioè un punto definito su F.

Idea: Sia k una chiusura algebrica di F. Tutte superficie lisce di grado 5 in $\mathbf{P}^5$ su k sono isomorfe a $\mathbf{P}^2$ scoppiato in $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$,$(1:1:1)$, cioè a $\mathrm{Gr}(2,5)_a^{\mathrm{sf}}/T$. Si prova (con Galois descent) che X su F è isomorfa a $\mathrm{Gr}(2,5)_a^{\mathrm{sf}}/S$, dove $S \subset \mathrm{GL}(5)$ è un toro massimale su F (en generale $S \neq (F^*)^5$). Quindi X è unirazionale su F, ergo $X(F) \neq \emptyset$. QED

Dalla Proposizione si diduce una classica teorema di Enriques:

Sia F un campo di car. 0. Ogni superficie liscia X di grado 5 in $\mathbf{P}^5_F$ ha un punto razionale, cioè un punto definito su F.

Idea: Sia k una chiusura algebrica di F. Tutte superficie lisce di grado 5 in $\mathbf{P}^5$ su k sono isomorfe a $\mathbf{P}^2$ scoppiato in $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$,$(1:1:1)$, cioè a $\mathrm{Gr}(2,5)^{\mathrm{sf}}_a/T$. Si prova (con Galois descent) che X su F è isomorfa a $\mathrm{Gr}(2,5)^{\mathrm{sf}}_a/S$, dove $S \subset \mathrm{GL}(5)$ è un toro massimale su F (en generale $S \neq (F^*)^5$). Quindi X è unirazionale su F, ergo $X(F) \neq \emptyset$. QED

Allo stesso modo dimostriamo che per ogni rappresentazione fondamentale $G \to \mathrm{GL}(V)$ soddisfacente la condizione nella Proposizione, ogni varietà X su F tale che $X \times_F k \simeq Z \times_F k$, è unirazionale su F.

Dalla Proposizione si diduce una classica teorema di Enriques:

Sia F un campo di car. 0. Ogni superficie liscia X di grado 5 in $\mathbf{P}^5_F$ ha un punto razionale, cioè un punto definito su F.

Idea: Sia k una chiusura algebrica di F. Tutte superficie lisce di grado 5 in $\mathbf{P}^5$ su k sono isomorfe a $\mathbf{P}^2$ scoppiato in $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$,$(1:1:1)$, cioè a $\mathrm{Gr}(2,5)^{\mathrm{sf}}_a/T$. Si prova (con Galois descent) che X su F è isomorfa a $\mathrm{Gr}(2,5)^{\mathrm{sf}}_a/S$, dove $S \subset \mathrm{GL}(5)$ è un toro massimale su F (en generale $S \neq (F^*)^5$). Quindi X è unirazionale su F, ergo $X(F) \neq \emptyset$. QED

Allo stesso modo dimostriamo che per ogni rappresentazione fondamentale $G \to \mathrm{GL}(V)$ soddisfacente la condizione nella Proposizione, ogni varietà X su F tale che $X \times_F k \simeq Z \times_F k$, è unirazionale su F.

Domanda aperta: E X razionale su il campo di definizione F?

Si, nel caso $R = A_n$ (M. Florence, 2010).

Risultato principale

Teorema 2 (O.Popov, U.Derenthal, V.Serganova, A.S. congetturato da Batyrev)

Sia X una superficie di del Pezzo di grado $2 \leq d \leq 5$. Allora esiste una rappresentazione minuscola $G \to \mathrm{GL}(V)$ ed una immersione chiusa di un torsore universale $Y \to X$ in $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$, equivariante per l'azione di T (che dà l'immersione chiusa $X \hookrightarrow Z$).

Per di più, i divisori $Y \cap \mathrm{Ker}(V \to V_\chi)$, che sono le sezioni iperpiane invarianti per T, si proiettano sulle rette dentro X.

Teorema 2 (O.Popov, U.Derenthal, V.Serganova, A.S. congetturato da Batyrev)

Sia X una superficie di del Pezzo di grado $2 \leq d \leq 5$. Allora esiste una rappresentazione minuscola $G \to \mathrm{GL}(V)$ ed una immersione chiusa di un torsore universale $Y \to X$ in $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$, equivariante per l'azione di T (che dà l'immersione chiusa $X \hookrightarrow Z$).

Per di più, i divisori $Y \cap \mathrm{Ker}(V \to V_\chi)$, che sono le sezioni iperpiane invarianti per T, si proiettano sulle rette dentro X.

Ricordiamo che a superficie di del Pezzo X di grado d può essere ottenuta come $X = \mathrm{Bl}_M(X')$, dove X' è una superficie di del Pezzo di grado $d+1$, e $M \in X'$.

Idea di dimostrazione (Vera Serganova - A.S.): Imitare lo scoppiamento a livello di G/P e G'/P', partando da $\mathrm{Gr}(2, 5)$.

Sia $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$ la decomposizione di V nella somma diretta di rappresentazioni di G', dove V_1 è la rappresentazione minuscola di G', e sia $\pi : V \to V_1$ la proiezione.

Proposizione.
Esiste un sottoinsieme aperto $U \subset (G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ tale che $\pi : U \to V_1 \setminus \{0\}$ è la composizione di un torsore di k^* ed il morfismo di contrazione

$$U/k^* \simeq \mathrm{Bl}_{(G'/P')_a \setminus \{0\}}(V_1 \setminus \{0\}) \longrightarrow V_1 \setminus \{0\},$$

cioè il scoppiamento di $V_1 \setminus \{0\}$ lungo $(G'/P')_a \setminus \{0\}$.

Supponiamo che $Y' \subset (G'/P')_a^{\mathrm{sf}}$ è un torsore universale $f : Y' \to X'$. All'inizio prendiamo $Y' = \mathrm{Gr}(2,5)_a^{\mathrm{sf}}$.

Sia S il centralizzante di T in $\mathrm{GL}(V)$. Allora S è il toro diagonale per quanto riguarda una base di autovettori di T. (Ricordiamo la decomposizione $V = \oplus V_\chi$, $\dim(V_\chi) = 1$.) Allo stesso modo, S' è il toro diagonale in $\mathrm{GL}(V')$.

Lemma cruciale. Possiamo trovare $t_M \in S'$ tale che

$$t_M(G'/P')_a \cap Y' = f^{-1}(M) \ \subset V_1$$

(un "translato" di $(G'/P')_a$ intersecato Y' è un'orbita di T').

Sia Y la chiusura di $\pi^{-1}(t_M^{-1}(Y' \setminus f^{-1}(M)))$ dentro l'insieme aperto $U \subset (G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ come nella Proposizione. Ne segue che Y è un torsore universale su X come desiderato. QED

Con qualche lavoro più, dimostriamo che

$$Y = \bigcap_{i=1}^{6-d} t_i (G/P)_a^{\mathrm{sf}},$$

dove $t_i \in S$. (La intersezione di $6-d$ "translati" di $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$.)

Domanda aperta: Quali sono le condizioni su $t_1, \ldots, t_{6-d}$ che garantiscono che l'intersezione come sopra è un torsore universale sulla superficie di del Pezzo di grado d?

(I punti $t_1, \ldots, t_{6-d}$ non possono essere in posizione generale!)

Infatti, è ben noto che l'ideale di G/P è generato per quadriche. Da qui si deduce

Corollario. $\mathrm{Cox}(X)$ è generato dalle classi di rette $\mathbf{P}^1 \subset X$, soggetto a relazioni quadratiche.

(V. Batyrev - O.Popov per i generatori,
M. Stillman, D. Testa, M.Velasco, A. Laface, V. Serganova, A.S. per le relazioni)

Per concludere, ecco una generalizzazione di Teorema 2 per le superficie di del Pezzo di grado 1.

Teorema 3 (V.Serganova - A.S.)

Sia X una superficie di del Pezzo di grado 1. Sia $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ la rappresentazione aggiunta. Èsiste un'immersione chiusa di un torsore universale $Y \to X$ in $(G/P)_a^{\mathrm{sf}}$ equivariante per l'azione di T.

Per di più, per tutte le 240 radici $\alpha \in E_8$ le sezioni iperpiane $Y \cap \mathrm{Ker}(V \to V_\alpha)$ si proiettano sulle 240 rette dentro X.

La dimostrazione utilizza Teorema 2, ma è molto più complicata.

Inoltre si può generalizzare il Corollario:

L'anello di Cox di ogni superficie di del Pezzo X di grado 1 è generato dalle classi di rette in X e due curvi in $|-K_X|$
(242 generatori e 17399 relazioni quadratiche)

(V. Batyrev - O.Popov per i generatori,
D. Testa, A.Várilly-Alvarado, M.Velasco, B. Sturmfels, Z. Xu per le relazioni)

Su campi di numeri, e.g. $F = \mathbf{Q}$, i torsori universali hanno molte applicazione in teoria dei numeri analitica (congettura di Manin) ed in geometria aritmetica (il principio di Hasse e il problema di approssimazione di punti adelici per i punti razionali).

Un annuncio pubblicitario:

Convegno “Torsore: teoria ed applicazioni”
10-14 Gennaio 2011
Edimborgo, Scozia
organizzato da V. Batyrev e A. Skorobogatov

email: a.skorobogatov@imperial.ac.uk

Un annuncio pubblicitario:

Convegno “Torsore: teoria ed applicazioni”
10-14 Gennaio 2011
Edimborgo, Scozia
organizzato da V. Batyrev e A. Skorobogatov

email: a.skorobogatov@imperial.ac.uk

Grazie, e scusatemi per i miei errori!