

## II. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ КАСАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ НЬЮХАУСА

*С.В. Гонченко, Д.В. Тураев, Л.П. Шильников*

### СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение . . . . .	69
§ 2. Три класса гомоклинических касаний . . . . .	77
§ 3. Нетривиальные гиперболические подмножества систем с гомоклиническим касанием третьего класса . . . . .	88
§ 4. Существование гомоклинических касаний третьего класса	100
§ 5. Гомоклинические касания произвольно высокого порядка	111
§ 6. Периодические траектории высоких порядков вырождения	121
Литература . . . . .	126

### § 1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию сложных и неожиданных явлений, наблюдаемых в двумерных отображениях (или в трехмерных потоках) с гомоклиническими касаниями. Так, в частности, мы показываем, что в любой окрестности, в  $S^1$ -топологии для произвольного конечного  $r$ , системы с квадратичным гомоклиническим касанием имеются негрубые системы с гомоклиническими касаниями произвольно высоких порядков, т.е. системы произвольно высокой коразмерности. Ранее в теории бифуркаций таких явлений не наблюдалось.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00231), INTAS (грант № 97-804), научной программы "Университеты России" (проект № 1905)

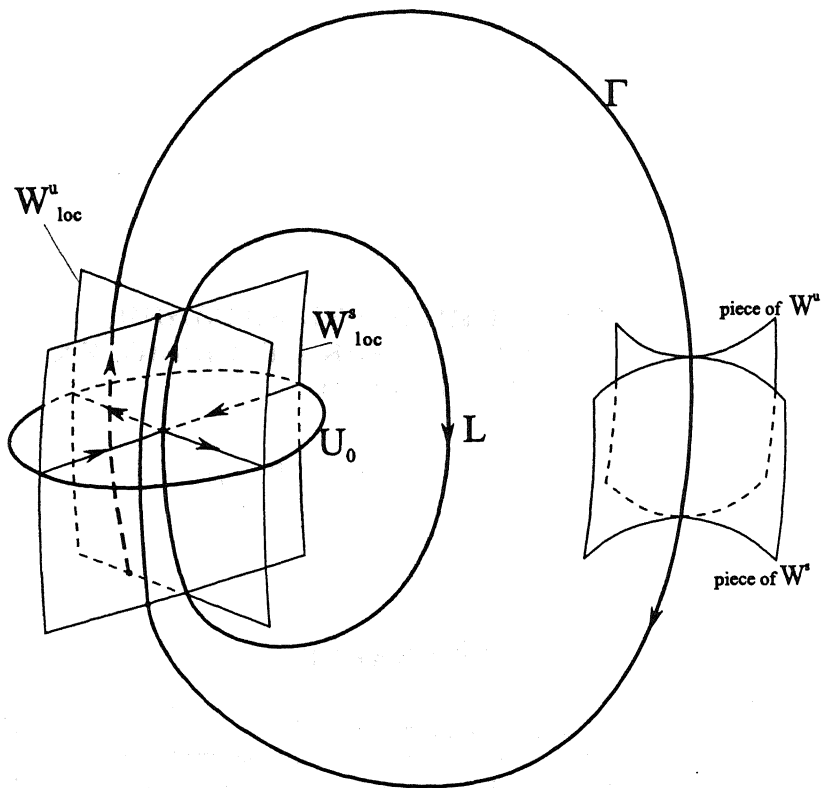


Рис. 1.

Изучение систем с гомоклиническими касаниями было начато в [4]. Прежде всего, там были выделены три класса таких систем. Именно, пусть  $L$  — седловое периодическое движение,  $\Gamma$  — гомоклиническая траектория, по которой устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия  $L$  касаются квадратично (рис.1). Пусть  $\lambda$  и  $\gamma$  — мультипликаторы  $L$  и  $|\lambda| < 1$ ,  $|\gamma| > 1$ . Предположим, что  $|\lambda\gamma| \neq 1$ ; при этом, не уменьшая общности, можно считать  $|\lambda\gamma| < 1$ . Пусть  $U$  — малая окрестность замыкания  $\Gamma \cup L$  гомоклинической траектории и  $N$  — множество всех траекторий, целиком лежащих в  $U$ . В зависимости от знаков мультипликаторов и знаков некоторых коэффициентов, характеризующих то, как устойчивое и неустойчивое многообразия примыкают к  $\Gamma$ , системы с гомоклиническими касаниями относятся к одному из трех классов:

- 1) для систем первого класса множество  $N$  тривиально:  $N = \{L, \Gamma\}$ ;
- 2) для систем второго класса  $N$  является нетривиальным

неравномерно-гиперболическим множеством, которое допускает полное описание на языке символической динамики (с помощью некоторой факторсистемы топологической схемы Бернулли из трех символов);

3) для систем третьего класса  $N$ , по-прежнему, содержит не тривиальные гиперболические подмножества, но ими все множество  $N$ , вообще говоря, не исчерпывается; при этом на бифуркационных пленках систем третьего класса имеет место всюду плотная негрубость. (На многомерный случай аналогичная классификация была распространена в [10], [11], в том числе для систем с гомоклиническими касаниями произвольного конечного порядка.)

Конкретно, как следует из [4], в любом однопараметрическом семействе систем с гомоклиническим касанием третьего класса, в котором величина

$$\theta = -\frac{\ln |\lambda|}{\ln |\gamma|} \quad (1.1)$$

меняется монотонно, плотны системы, имеющие негрубые периодические движения. Позднее в [10], [12] было показано, что в таких однопараметрических семействах плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений (при  $\theta > 1$ ; если  $\theta < 1$ , то со счетным множеством неустойчивых) и системы со вторичными гомоклиническими касаниями.

Причиной этому служит то, что для систем третьего класса структура множества  $N$  существенно зависит от величины  $\theta$ . Фактически, уже из [4] вытекает, что  $\theta$  является *инвариантом  $\Omega$ -эквивалентности* (т.е. топологической эквивалентности на множестве неблуждающих траекторий) для систем третьего класса [11], [13]. Иными словами, системы с различными значениями  $\theta$  не могут быть  $\Omega$ -эквивалентны, и, следовательно, *сколь угодно малые изменения  $\theta$  с необходимостью приводят к бифуркациям в неблуждающем множестве.*

В частности, сколь угодно малым изменением  $\theta$  можно получить еще одну траекторию гомоклинического касания (при этом исходное гомоклиническое касание не исчезает). Этот факт имеет далеко идущие последствия. Именно, применением локализованных малых гладких добавок удалось установить, что в *множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса плотны<sup>1)</sup> системы, каждая из которых имеет бесконечно много седловых периодических траекторий с гомоклиническими касаниями, причем тоже третьего класса.*

<sup>1)</sup>Здесь, как и всюду в данной статье, мы имеем в виду плотность в  $C^r$ -топологии для произвольного конечного  $r$ . Если мы рассматриваем  $C^\infty$ -гладкие системы, то плотность в  $C^r$ -топологии для произвольного конечного  $r$  означает, по определению, плотность в  $C^\infty$ -топологии.

Заметим, что последнее означает, что такие системы имеют *бесконечно много независимых непрерывных инвариантов (модулей)  $\Omega$ -эквивалентности* (поскольку для каждого отдельно взятого касания третьего класса соответствующая величина  $\theta$  является таким инвариантом; мы не утверждаем, что совокупность всех этих величин служит полным инвариантом — другие инварианты также возможны, например величина  $\tau$  из [11], [12], [13]).

Конструкция с бесконечным множеством траекторий гомоклинических касаний служит основным элементом в доказательстве следующего утверждения, которое, ввиду его важности, мы будем называть основной теоремой.

**Основная теорема.** *В множестве систем с квадратичным гомоклиническим касанием третьего класса плотны системы, имеющие гомоклинические касания любого, произвольно большого порядка.*

Заметим, что системы третьего класса есть вблизи любой системы с квадратичным гомоклиническим касанием. Поэтому результат основной теоремы противоречит, скажем, традиционной для теории особенности схеме разрешения вырождений: здесь малым и сколь угодно гладким шевелением системы мы беспрепятственно переходим от квадратичного касания к вырождениям (касаниям) более высокого порядка.

Исследование отображения первого возвращения вблизи касания  $n$ -го порядка позволяет вывести из основной теоремы следующий результат: *в множестве систем третьего класса плотны системы, имеющие бесконечно много негрубых периодических траекторий любого порядка вырождения<sup>1)</sup>.*

Таким образом, для систем с гомоклиническими касаниями полное описание динамики (в частности — полное описание бифуркаций периодических движений) в рамках какого-либо конечно параметрического семейства принципиально невозможно.

Системы с квадратичными гомоклиническими касаниями, близкими к исходному, образуют бифуркационные поверхности коразмерности один. Изложенные выше результаты получены, в основном, путем анализа возмущений, не выводящих с такой бифуркационной поверхности. Естественно, однако, что в первую очередь должны быть рассмотрены возмущения, которые “расщепляют” исходное касание инвариантных многообразий. Пусть  $\mu$  — бифуркационный параметр, отвечающий за расщепление сепаратрис, и  $X_\mu$  — семейство систем, в котором  $\mu$  меняется монотонно. Таким образом,  $X_\mu$  трансверсально пересекает поверх-

<sup>1)</sup>Имеются в виду траектории с одним мультипликатором, равным 1 или  $-1$ , и произвольно большим числом нулевых ляпуновских величин — последовательных коэффициентов при нелинейных членах в нормальной форме отображения Пуанкаре на центральном многообразии.



ность систем с гомоклиническим касанием при  $\mu = 0$ . Принципиальное значение здесь имеет следующий факт: в любом трансверсальном однопараметрическом семействе  $X_\mu$  имеется последовательность интервалов, накапливающаяся к  $\mu = 0$ , в которых плотны значения параметра, отвечающие квадратичным гомоклиническим касаниям (при этом  $X_\mu$  трансверсально каждой из соответствующих бифуркационных поверхностей).

Этот результат был доказан Ньюхаусом для двумерных диффеоморфизмов<sup>1)</sup> в [25]. Грубо говоря, он означает, что, хотя каждое индивидуальное гомоклиническое касание может быть устранено малыми шевелениями системы, они, тем не менее, не позволяют избавиться от гомоклинических касаний вообще.

Области всюду плотной негрубости в пространстве  $C^r$ -гладких ( $r \geq 2$ ) динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями, называются областями Ньюхауса (вышеупомянутые интервалы значений параметра, по которым трансверсальное семейство  $X_\mu$  пересекает области Ньюхауса, называются интервалами Ньюхауса).

Наиболее популярный результат (открытый в [24]) о динамике двумерных отображений в областях Ньюхауса состоит в том, что при условии, что седловая величина  $\sigma = |\lambda\gamma|$  — модуль произведения мультипликаторов периодической траектории  $L$  — меньше единицы, в областях Ньюхауса плотны системы, имеющие бесконечно много устойчивых<sup>2)</sup> периодических траекторий.

Данное утверждение практически немедленно вытекает из плотности значений параметра, отвечающих гомоклиническим касаниям, и более раннего результата [4] о том, что в случае  $\sigma < 1$  в трансверсальном семействе имеется последовательность (накапливающаяся к  $\mu = 0$ ) интервалов значений  $\mu$ , отвечающих существованию устойчивого периодического движения<sup>3)</sup>.

---

<sup>1)</sup>На общий многомерный случай он был перенесен в [8]; при условии, что неустойчивое многообразие седловой периодической траектории одномерно, многомерный случай делался также в [27].

<sup>2)</sup>Если  $\sigma > 1$ , то бесконечно много вполне неустойчивых. Для многомерного случая общее свойство систем в областях Ньюхауса — это сосуществование (в бесконечном количестве) периодических траекторий с различными размерностями устойчивых многообразий, т.е. с различным числом положительных/отрицательных показателей Ляпунова (см. [21]); там же даны критерии существования бесконечного множества устойчивых периодических траекторий в многомерном случае (см. также [9]), частный случай был рассмотрен в [27].

<sup>3)</sup>Если не интересоваться специально однопараметрическими семействами, то можно воспользоваться тем, что в областях Ньюхауса плотны системы с гомоклиническими касаниями третьего класса, а в множестве таких систем системы со счетным числом устойчивых плотны [10].

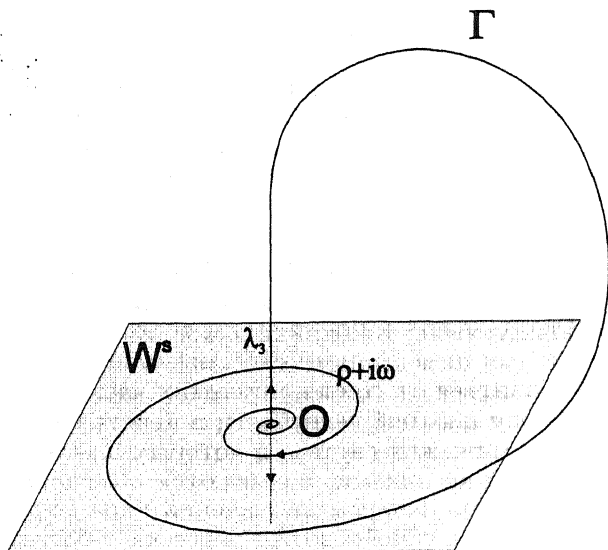


Рис. 2.

Как уже отмечалось, системы с гомоклиническими касаниями третьего класса сколь угодно близки к любой системе с гомоклиническим касанием вообще. Следовательно, они плотны в областях Ньюхауса и наша основная теорема немедленно влечет следующий фундаментальный факт.

*В областях Ньюхауса плотны системы, имеющие бесконечно много как гомоклинических касаний, так и периодических траекторий произвольно высоких порядков вырождения.*

Таким образом, бесконечные вырождения не исчезают при сходе с бифуркационной поверхности, отвечающей гомоклиническому касанию. Напротив, сколь угодно близко к любой такой поверхности мы имеем области, где бесконечные вырождения плотны.

С чисто математической точки зрения, этот результат указывает на далеко нетривиальную структуру разбиения пространства динамических систем на классы  $\Omega$ -эквивалентности. Что более важно — он имеет непосредственное отношение к изучению конкретных динамических моделей. Дело в том, что гомоклинические касания (а следовательно, и области Ньюхауса в пространстве параметров) могут быть обнаружены в самых разнообразных конкретных семействах систем со сложной динамикой. Так, они существуют в отображении Эно (и, вообще, в любом семействе двумерных отображений, достаточно близких к одномерным, после удвоений периода), появляются при разрушении инвариантных торов [2], [26], т.е. при переходе от квазипериодического режима к хаосу могут быть найдены в мо-

делях лоренцевского типа в области за границей существования аттрактора Лоренца [3], [28], в системах с диким псевдогиперболическим аттрактором [16] и в системах со спиральным хаосом.

Последними называются системы, чей аттрактор может содержать гомоклиническую петлю состояния равновесия типа седло-фокус. В трехмерном случае — это седловое состояние равновесия, в котором корни характеристического уравнения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \rho \pm i\omega, \quad \rho < 0, \quad \omega \neq 0, \quad \lambda_3 > 0, \\ \rho + \lambda_3 &> 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \end{aligned}$$

У такого состояния равновесия неустойчивое многообразие одномерно и состоит (за вычетом состояния равновесия) из двух траекторий — неустойчивых сепаратрис. Если одна из сепаратрис возвращается в седло-фокус при  $t \rightarrow +\infty$  (т.е. она лежит в двумерном устойчивом многообразии; см. рис. 2), то говорят, что имеется гомоклиническая петля. Системы с гомоклинической петлей седло-фокуса образуют бифуркационные поверхности коразмерности один. Как было установлено в [17] (для многомерного случая — в [19]), в любой окрестности петли имеются нетривиальные гиперболические множества. При этом, согласно [14], на бифуркационной пленке<sup>1)</sup> плотны: 1) системы, имеющие негрубые периодические движения, 2) системы со счетным числом устойчивых и 3) системы с гомоклиническими касаниями. Последнее означает, что вблизи любой системы с петлей седло-фокуса есть области Ньюхауса и бесконечные вырождения, описываемые основной теоремой.

Наличие вырождений произвольно высокого порядка в областях Ньюхауса делает нереалистичной задачу полного качественного описания самых разных моделей со сложной динамикой (типа перечисленных выше). Так, в общем  $n$ -параметрическом семействе, пересекающем поверхности гомоклинического касания, будут встречаться периодические и гомоклинические траектории порядка вырождения  $n$ .<sup>2)</sup> Но при этом учет дополнительных параметров с необходимостью будет приводить к новым, более высокого порядка вырождениям и т.д.

Данные результаты были анонсированы в работе авторов [6]. Подробная схема доказательства была приведена в [7], [22], опущенные там технические фрагменты содержатся в том или ином виде в [20], [21]. В настоящее время к этим проблемам и способу их доказательства возник вполне определенный интерес, в

<sup>1)</sup>Точнее, в любом однопараметрическом семействе на пленке, в котором величина  $\nu = -\lambda_3/\rho < 1$  меняется монотонно.

<sup>2)</sup>При  $n = 2$  бифуркации, приводящие к появлению периодических траекторий порядка вырождения два (так называемых каспов), были изучены в [15] для случая систем с негрубой гомоклинической траекторией Пуанкаре и в [1] — для случая систем с гомоклинической петлей седло-фокуса.

силу чего мы сочли необходимым дать полное изложение доказательств. Заметим, что аналогичные результаты имеют место и в многомерном случае [9], [21], но здесь мы ограничимся только рассмотрением двумерных диффеоморфизмов и трехмерных потоков с целью большей наглядности.

Работа состоит из шести параграфов. § 2 носит подготовительный характер. В нем приведены необходимые формулы для локального и глобального отображений, а также проведено разбиение систем с гомоклиническим касанием на классы и доказана теорема 1 о том, что в окрестности любой системы с гомоклиническим касанием имеются системы с гомоклиническими касаниями третьего класса.

В § 3, в случае систем третьего класса, изучается структура нетривиальных гиперболических подмножеств, показывается, что она существенно зависит от величины  $\theta$  (теорема 2).

В § 4 рассматриваются основные бифуркации в однопараметрических семействах систем третьего класса (роль параметра играет  $\Omega$ -модуль  $\theta$ ). Доказывается теорема 3 о том, что в таких семействах плотны значения параметра, отвечающие вторичным гомоклиническим касаниям. Здесь же доказывается теорема 4 о том, что в множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса плотны системы с бесконечным числом гомоклинических касаний.

В § 5 доказывается основная теорема (теорема 5) о плотности систем с гомоклиническими касаниями произвольно высокого порядка. Отметим, что здесь мы используем индуктивный метод доказательства, переходя путем малых возмущений от касания порядка  $n$  к касанию порядка  $n + 1$ .<sup>1)</sup> В этом ряду принципиально важным является, по-существу, последний шаг: переход от касания порядка  $r - 1$  к касанию порядка  $r$ . Последнее (аналогичное касанию кривых  $y = 0$  и  $y = x^{r+1}$  в нуле) является в случае  $C^r$ -топологии (с любым конечным  $r$ ) касанием "неопределенного порядка", так как сколь угодно малыми  $C^r$ -гладкими возмущениями его можно превратить "во что угодно"; например, добиться локального совпадения кривых. Таким способом мы доказываем следующий результат, в некотором смысле конкретизирующий утверждения основной теоремы.

*На бифуркационной поверхности систем с гомоклиническим касанием третьего класса (а также в областях Ньютона) плотны системы с гомоклиническими касаниями, отвечающими локальному совпадению устойчивых и неустойчивых многообразий.*

<sup>1)</sup>Применяя лемму (лемма 2) о том, что из двух гетероклинических касаний (порядков  $n$  и единица) можно сделать малыми возмущениями одно касание порядка  $n + 1$ .

В § 6 устанавливается существование негрубых периодических траекторий произвольно высокого порядка вырождения (теорема 6). Доказательство здесь основано на перемасштабировании отображения первого возвращения вблизи траектории вырожденного гомоклинического касания. Так, мы устанавливаем, что в случае касания порядка  $n$ , где  $n < r$ , существуют периодические траектории с мультипликаторами  $+1$  и  $-1$  и равными нулю первыми  $n$  и  $[n/2] - 1$  соответственно ляпуновскими величинами (в ограничении на центральное многообразие соответствующее отображение записывается в виде  $\bar{x} = \pm x + lx^{n+1} + \dots$ , где  $l \neq 0$ ). В случае  $n \geq r$  или гомоклинического касания, отвечающего локальному совпадению устойчивого и неустойчивого многообразия, мы доказываем существование периодических траекторий, для которых либо отображение Пуанкаре в ограничении на центральное многообразие, либо его квадрат является тождественным (т.е. либо отображением вида  $\bar{x} = x$  в первом случае, либо  $\bar{x} = -x$  — во втором).

## § 2. Три класса гомоклинических касаний

Рассмотрим  $C^r$ -гладкий ( $3 \leq r \leq \infty$ ) двумерный диффеоморфизм  $f_0$ . Предположим, что выполнены следующие условия:

А)  $f_0$  имеет грубую седловую периодическую траекторию  $L_0$  с мультипликаторами  $\lambda$  и  $\gamma$ , где  $|\lambda| < 1$ ,  $|\gamma| > 1$ .

Б) Седловая величина  $\sigma \equiv |\lambda\gamma|$  меньше единицы.

В) Устойчивое  $W_0^s$  и неустойчивое  $W_0^u$  многообразия периодической траектории касаются квадратично в точках некоторой гомоклинической траектории  $\Gamma_0$  (рис. 3(a)).

Пусть  $O$  — какая-либо точка траектории  $L_0$ . Она является неподвижной точкой для некоторой итерации рассматриваемого диффеоморфизма. Мы обозначим через  $T_0$  ограничение данной итерации на малую окрестность  $U_0$  точки  $O$  (рис. 3(b)) и назовем  $T_0$  *локальным отображением*. По определению, мультипликаторы  $\lambda$  и  $\gamma$  являются собственными числами матрицы линеаризации  $T_0$  в точке  $O$ .

Отображение  $T_0$  в некоторых  $C^{r-1}$ -координатах  $(x, y)$  на  $U_0$  может быть записано в следующем виде [11], [13]:

$$\bar{x} = \lambda x + h(x, y)x^2y, \quad \bar{y} = \gamma y + g(x, y)xy^2, \quad (2.1)$$

где  $h(x, y) \cdot xy$  и  $g(x, y) \cdot xy$  — функции класса  $C^{r-1}$ . В этих координатах, в частности, неподвижной точке  $O$  отвечает начало координат, а уравнения локального устойчивого  $W_{loc}^s$  и локального неустойчивого  $W_{loc}^u$  многообразий точки  $O$  будут соответственно  $y = 0$  и  $x = 0$ .

Представление  $T_0$  в форме (2.1) является весьма удобным, поскольку в этих координатах отображение  $T_0^k$  будет линейным в главном порядке, равномерно для всех достаточно больших  $k$ .

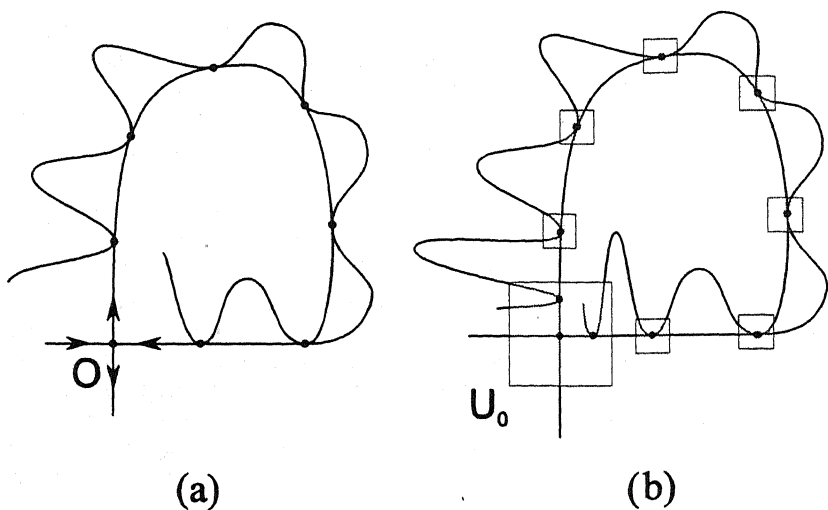


Рис. 3.

Именно, в случае  $\sigma < 1$  имеет место следующее представление [11], [13], [29] для отображения  $T_0^k : (x_0, y_0) \mapsto (x_k, y_k)$

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda^k x_0 + |\lambda|^k \xi_k(x_0, y_k), \\ y_0 &= \gamma^{-k} y_k + |\gamma|^{-k} \eta_k(x_0, y_k), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где функции  $\xi_k$  и  $\eta_k$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$  вместе со всеми производными до порядка  $(r-1)$  включительно. Кроме того,

$$\|\xi_k, \eta_k\|_{C^{r-2}} = O(|\gamma|^{-k}). \quad (2.3)$$

В  $U_0$  имеется счетное множество точек траектории  $\Gamma_0$  (то, что  $\Gamma_0$  — гомоклиническая траектория, означает, что положительные итерации любой точки из  $\Gamma_0$  накапливаются к  $O$  по  $W_{loc}^s$ , а отрицательные — по  $W_{loc}^u$ ). Выберем пару таких гомоклинических точек и обозначим их как  $M^+$  и  $M^-$ , где  $M^+(x^+, 0) \in W_{loc}^s$  и  $M^-(0, y^-) \in W_{loc}^u$ . Не ограничивая общности, будем полагать, что  $x^+ > 0$  и  $y^- > 0$ . Пусть  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  — некоторые достаточно малые прямоугольные окрестности гомоклинических точек  $M^+$  и  $M^-$  соответственно:

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \{(x, y) \mid |x - x^+| \leq \varepsilon_0, |y| \leq \varepsilon_0\}, \\ \Pi^- &= \{(x, y) \mid |x| \leq \varepsilon_1, |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно, при малых  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  имеем  $T_0(\Pi^+) \cap \Pi^+ = \emptyset$  и  $T_0(\Pi^-) \cap \Pi^- = \emptyset$ . Пусть  $q$  — такое положительное целое, что  $f_0^q(M^-) = M^+$  (такое  $q$  всегда существует, поскольку  $M^-$  и  $M^+$  — точки

одной траектории). Отображение  $T_1 \equiv f^q : \Pi^- \rightarrow U_0$  называется *глобальным отображением*. Оно, очевидно, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= cx + d(y - y^-)^2 + \dots,\end{aligned}\tag{2.5}$$

где многоточия обозначают члены более высокого порядка ( $o(|x| + |y - y^-|)$  в первом уравнении и  $o(|x| + |y - y^-|^2) + O(|x||y - y^-|)$  — во втором). Заметим, что в (2.5)  $bc \neq 0$ , так как  $T_1$  — диффеоморфизм, и  $d \neq 0$ , поскольку касание  $T_1(W_{loc}^u)$  с  $W_{loc}^s$  в точке  $M^+$  квадратичное по предположению.

Для нас будут важны знаки величин  $c$  и  $d$ . Они, конечно, определяются также выбором ориентации осей  $x$  и  $y$  (напомним, что мы зафиксировали ориентацию, положив  $x^+ > 0$ ,  $y^- > 0$ ). Положительное  $d$  отвечает касанию  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  с  $W_{loc}^s$  сверху, отрицательное — касанию снизу. Если  $\gamma < 0$ , то каждая итерация отображения  $T_0$  меняет ориентацию по  $y$ , и мы можем выбрать гомоклиническую точку  $M^+$  так, чтобы  $d$  было положительным. При  $\lambda < 0$  итерации  $T_0$  меняют ориентацию по  $x$ , и мы можем выбрать гомоклинические точки так, чтобы  $c$  было положительным. В соответствии с этим (см. также [4]), можно выделить 10 разных типов гомоклинических касаний, каждому из которых отвечает определенная комбинация знаков параметров  $\lambda, \gamma, c$  и  $d$  (см. таблицу 1). Отметим, что в этой таблице символ  $+(-)$  означает, что для данного типа гомоклинического касания знак соответствующего параметра может быть изменен при выборе другой пары гомоклинических точек.

	$H_1^1$	$H_1^2$	$H_1^3$	$H_2$	$H_3^1$	$H_3^2$	$H_3^3$	$H_3^4$	$H_3^5$	$H_3^6$
$\lambda$	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-
$\gamma$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$d$	-	-	-	+	+	+	$+(-)$	$+(-)$	$+(-)$	$+(-)$
$c$	+	-	$+(-)$	-	+	$+(-)$	+	-	+	-

Таблица 1.

Аналогичная конструкция возникает при рассмотрении трехмерных потоков, имеющих седловую периодическую траекторию с негрубой гомоклинической траекторией, по которой устойчивое и неустойчивое многообразия касаются квадратично (рис. 1). Возьмем в качестве  $U_0$  малую секущую к периодической траектории и обозначим через  $T_0$  отображение Пуанкаре на  $U_0$ . Точка  $O$  пересечения периодической траектории с секущей будет седловой неподвижной точкой для  $T_0$ , поэтому здесь мы также имеем формулы (2.1)–(2.3). Возьмем теперь в качестве точек  $M^+$  и  $M^-$  пару точек пересечения гомоклинической траектории

с  $U_0$ :  $M^+$  на локальном устойчивом многообразии и  $M^-$  на локальном неустойчивом. Так как это точки на одной траектории, то определено отображение  $T_1$  по траекториям потока из малой окрестности  $\Pi^-$  точки  $M^-$  на  $U_0$  в малую окрестность точки  $M^+$  на  $U_0$ . Время перехода траектории из окрестности точки  $M^-$  на  $U_0$  в окрестность точки  $M^+$  на  $U_0$  конечно и гладко зависит от начальной точки, поэтому  $T_1$  — диффеоморфизм. Соответственно, мы можем записать тейлоровское разложение  $T_1$  в точке  $M^-$ , которое дается той же самой формулой (2.5).

Всюду ниже будем иметь дело только с парой отображений  $(T_0, T_1)$ , поэтому не будем различать случаи двумерных диффеоморфизмов и трехмерных потоков (употребим термин “система” в обоих случаях). Заметим, что множество систем  $f$ , которые  $C^r$ -близки к  $f_0$  и имеют негрубую гомоклиническую траекторию  $\Gamma$ , близкую к  $\Gamma_0$ , образуют в пространстве  $C^r$ -диффеоморфизмов/потоков гладкое банахово подмногообразие  $N$  коразмерности один.

Обозначим через  $U$  достаточно малую окрестность множества  $O \cup \Gamma_0$  (рис. 3(b)). Изучим структуру множества  $N$  траекторий, целиком лежащих в  $U$ .

Любая траектория из  $N$  (за исключением  $O$ ) должна пересекать окрестности  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  (в противном случае такая траектория не будет близка к  $\Gamma_0$ ). Однако не для каждой начальной точки из  $\Pi^+$  ее траектория попадает в  $\Pi^-$ . Множество тех точек на  $\Pi^+$ , итерации которых под действием  $T_0$  попадают в  $\Pi^-$ , представляет собой объединение счетного числа полосок  $\sigma_k^0 = \Pi^+ \cap T_0^{-k} \Pi^-$ ,  $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$ , которые накапливаются к отрезку  $\Pi^+ \cap W_{\text{loc}}^s$  (рис. 4(a)). В свою очередь, образы полосок  $\sigma_k^0$  под действием  $T_0^k$  — это вертикальные полоски  $\sigma_k^1 = \Pi^- \cap T_0^k \Pi^+$  на  $\Pi^-$ , накапливающиеся к отрезку  $\Pi^- \cap W_{\text{loc}}^u$  (рис. 4(b)). Из (2.2)–(2.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sigma_k^0 &= \{(x, y) \mid |x - x^+| \leq \varepsilon_0, \\ &\gamma^{-k}(y^- - \varepsilon_1 + O(\gamma^{-k})) \leq y \leq \gamma^{-k}(y^- + \varepsilon_1 + O(\gamma^{-k}))\}, \\ \sigma_k^1 &= \{(x, y) \mid \lambda^k(x^+ - \varepsilon_0 + O(\gamma^{-k})) \leq x \leq \\ &\leq \lambda^k(x^+ + \varepsilon_0 + O(\gamma^{-k})), |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следуя [4], отнесем к *первому классу* гомоклинические касания, для которых

$$\gamma > 0 \text{ и } d < 0 \quad (2.7)$$

(первые три столбца таблицы 1). Ко *второму классу* относятся касания, для которых

$$\gamma > 0, \lambda > 0, c < 0, d > 0 \quad (2.8)$$



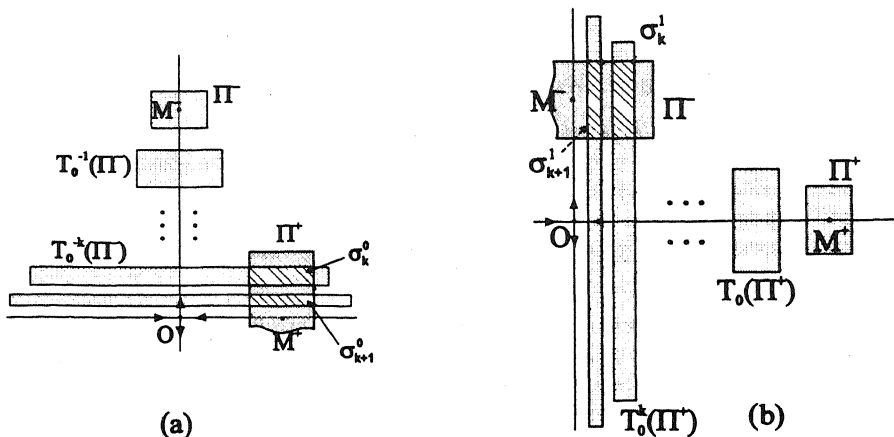


Рис. 4.

(четвертый столбец таблицы 1). Все остальные комбинации знаков  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $c$  и  $d$  отвечают *третьему классу* (последние шесть столбцов таблицы 1). Отметим, что в соответствии с (2.7) и (2.8) любое квадратичное касание в случае  $\gamma < 0$  является касанием третьего класса; а в случае  $\gamma > 0, \lambda < 0$  любое квадратичное касание “сверху” является касанием третьего класса. В случае  $\gamma > 0, \lambda > 0$ , касанию третьего класса отвечает комбинация  $c > 0, d > 0$ . В соответствии с (2.5), это — касание “сверху” ( $d > 0$ ) и правая полуокрестность негрубой гомоклинической точки в  $\Pi^-$  отображается относительно соответствующего глобального отображения  $T_1$  в полуокрестность, примыкающую к “параболе”  $T_1(W_{loc}^u) \cap \Pi^+$  сверху ( $c > 0$ ).

Для случая  $\lambda > 0$  и  $\gamma > 0$  классификация гомоклинических касаний проиллюстрирована на рис. 5. Рис. 5(a) и 5(b) отвечают гомоклиническим касаниям первого класса (в обоих случаях касания “снизу”), рис. 5(c) и 5(d) — второго и третьего класса соответственно (в обоих случаях касания “сверху”).

Следующее утверждение из [4] дает полное описание множества  $N$  для гомоклинических касаний первого и второго классов.

В случае касания первого класса множество  $N$  имеет тривиальную структуру:  $N = \{L_0, \Gamma_0\}$ . В случае касания второго класса множество  $N$  (неравномерно) гиперболично, при этом траектории из  $N$  находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями факторсистемы, получаемой из топологической стемы Бернулли из трех символов  $\{0, 1, 2\}$  отождествлением двух гомоклинических траекторий:  $(\dots, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$  и  $(\dots, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, \dots)$ .

Структура множества  $N$  в случае касания третьего класса изучается в последующих параграфах. Важность исследования

именно систем такого типа объясняется, в частности, тем, что касания третьего класса есть вблизи любой системы с гомоклиническим касанием. Именно, имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть  $f_\mu$  — однопараметрическое семейство, трансверсальное при  $\mu = 0$  бифуркационной поверхности систем с квадратичным гомоклиническим касанием. Тогда в любой окрестности точки  $\mu = 0$  имеются значения параметра, отвечающие квадратичным гомоклиническим касаниям третьего класса.

**Доказательство.** Пусть  $f_0$  имеет негрубую гомоклиническую траекторию либо первого, либо второго класса. Вложим  $f_0$  в гладкое однопараметрическое семейство  $f_\mu$ , трансверсальное при  $\mu = 0$  к поверхности  $H$  коразмерности один, состоящей из  $C^r$ -систем,  $C^r$ -близких к  $f_0$  и имеющих близкую к  $\Gamma_0$  траекторию гомоклинического касания.

Отображения  $T_0$  и  $T_1$  теперь зависят от  $\mu$ . Замена переменных, приводящая отображение  $T_0$  к виду (2.1), зависит  $C^{r-2}$ -гладко от  $\mu$  (см. [29]). При этом функции  $\xi$  и  $\eta$  в формуле (2.2) для  $T_0^k$  также  $C^{r-2}$ -гладко зависят от  $\mu$  и оценки (2.3) выполнены и для производных по  $\mu$  [11], [13], [29]. Также и  $\lambda$ , и  $\gamma$  теперь должны рассматриваться как функции (класса  $C^{r-2}$ ) от  $\mu$ .

Глобальное отображение  $T_1 \equiv T_1(\mu)$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^*(\mu) &= ax + b(y - y^-) + \varphi_1(x, y - y^-, \mu), \\ \bar{y} &= y^*(\mu) + cx + d(y - y^-)^2 + \varphi_2(x, y - y^-, \mu), \end{aligned} \quad (2.9)$$

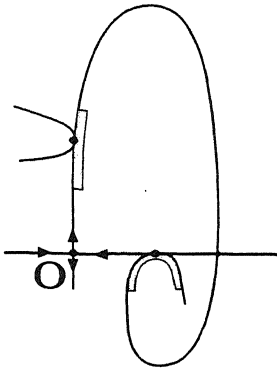
где  $x^*(0) = x^+$ ,  $y^*(0) = 0$ ; коэффициенты  $a, b, c$ , а также  $y^-$  являются теперь функциями от  $\mu$  (класса  $C^{r-2}$ ; мы предполагаем  $y^-$  зависящим от  $\mu$ , чтобы исключить линейный по  $(y - y^-)$  член в уравнении для  $\bar{y}$ ); функции  $\varphi_{1,2}$  не содержат линейных членов и при этом коэффициент при  $(y - y^-)^2$  в  $\varphi_2$  зануляется при  $\mu = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= O(|x| + |y - y^-|)^2, \\ |\varphi_2| &= O(x^2 + |x||y - y^-| + |\mu|(y - y^-)^2) + o((y - y^-)^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

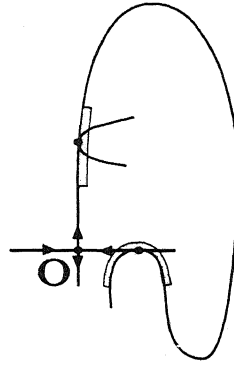
Напомним, что локальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $O$  распрямлены, т.е.  $W_{loc}^u = \{x = 0\}$  и  $W_{loc}^s = \{y = 0\}$ . Соответственно, кусок неустойчивого многообразия  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  вблизи точки  $M^+$  задается уравнением

$$\bar{y} = y^*(\mu) + \frac{d}{b^2}(x - x^*)^2 + o((x - x^*)^2). \quad (2.11)$$

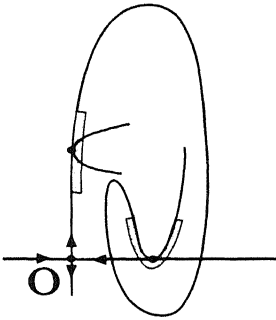
Трансверсальность семейства бифуркационной поверхности означает, что гомоклиническое касание при изменении  $\mu$  расщепля-



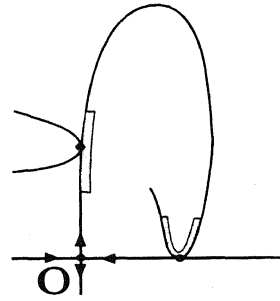
(a)  $c < 0, d < 0$



(b)  $c > 0, d < 0$



(c)  $c < 0, d > 0$



(d)  $c > 0, d > 0$

Рис. 5.

ется с ненулевой “скоростью”, т.е.

$$\frac{d}{d\mu} y^*(\mu) \neq 0.$$

Следовательно, не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$y^*(\mu) \equiv \mu$$

в (2.9) и, таким образом,  $T_1(\mu)$  перепишется как

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^*(\mu) &= ax + b(y - y^-) + \varphi_1(x, y - y^-, \mu), \\ \bar{y} &= \mu + cx + d(y - y^-)^2 + \varphi_2(x, y - y^-, \mu).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $\Gamma_0$  — негрубая гомоклиническая траектория второго класса (рис. 6), здесь  $\gamma > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $c < 0$ ,  $d > 0$ . Возьмем полосу  $\sigma_i^0$  с достаточно большим номером  $i$  и рассмотрим такие  $\mu > 0$ , что вершина кривой  $T_1(\mu)(W_{loc}^u)$  лежит ниже полосы  $\sigma_i^0$  на  $\Pi^+$ , а сама кривая пересекает эту полосу по двум отрезкам кривых:  $u_i^1$  и  $u_i^2$ . Вершина кривой (2.11) — это точка  $(x^*(\mu), \mu)$ , она лежит ниже полосы  $\sigma_i^0$ , если  $\mu \ll \gamma^{-i}$ , см. (2.6). Заметим, что это будет, во всяком случае, так, если  $\mu \sim \lambda^i$  (поскольку  $\lambda\gamma < 1$  по предположению и  $i$  берется достаточно большим), и именно такие  $\mu$  мы будем рассматривать. Уравнения кривых  $u_i^1$  и  $u_i^2$  на полоске  $\sigma_i^0$  находятся из системы (2.12), в которой нужно положить  $x = 0$  и учесть, что координаты  $\bar{y}$  точек на полоске  $\sigma_i^0$  должны удовлетворять неравенствам

$$\gamma^{-i}(y^- - \varepsilon_1) \leq \bar{y} \leq \gamma^{-i}(y^- + \varepsilon_1) \quad (2.13)$$

(см. (2.6)). Таким образом, получаем, что кривые  $u_i^1$  и  $u_i^2$  в параметрической форме задаются уравнением

$$x_0 - x^*(\mu) = bt + \dots, \quad y_0 = \mu + dt^2 + \dots, \quad (2.14)$$

где  $t$  пробегает интервал (мы учитываем, что  $\mu \ll \gamma^{-i}$ )

$$\gamma^{-i/2} \sqrt{\frac{y^- - \varepsilon_1}{d}} \leq t \leq \gamma^{-i/2} \sqrt{\frac{y^- + \varepsilon_1}{d}} \quad (2.15)$$

для кривой  $u_i^1$ , а для  $u_i^2$  — интервал

$$-\gamma^{-i/2} \sqrt{\frac{y^- + \varepsilon_1}{d}} \leq t \leq -\gamma^{-i/2} \sqrt{\frac{y^- - \varepsilon_1}{d}}. \quad (2.16)$$

Неравенства (2.15) и (2.16) задают (если положить  $t = y - y^-$  и  $x = 0$ ) отрезки  $l_1$  и  $l_2$  — две компоненты связности множества  $T_1^{-1}(\sigma_i^0) \cap W_{loc}^u(O)$ . Поскольку мы рассматриваем касание второго класса, то малые полукрестности, примыкающие к  $l_1$  и  $l_2$  со стороны положительных  $x$ , отображаются под действием  $T_1$  ниже (в сторону уменьшения  $y$ ) кривых  $u_i^{1,2}$ , т.е. направо (в сторону увеличения  $x$ ) от кривой  $u_i^1$  и налево от кривой  $u_i^2$  при  $b > 0$  (рис. 6) и, наоборот, налево от  $u_i^1$  и направо от  $u_i^2$  при  $b < 0$ .

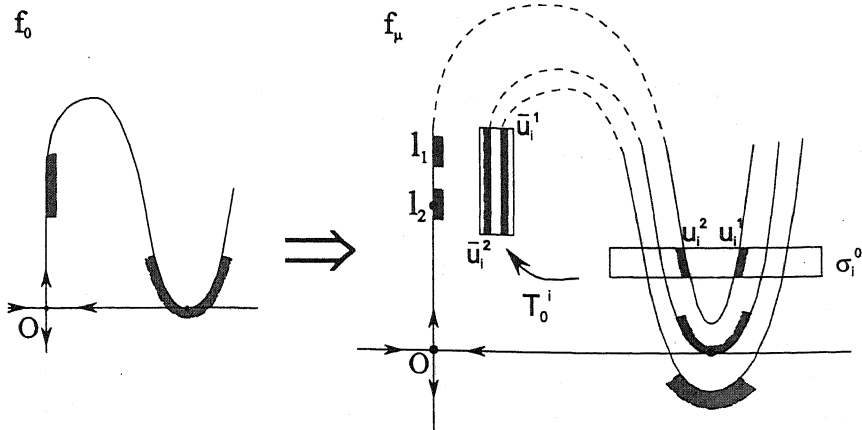


Рис. 6.

При отображении  $T_0^i$  полоска  $\sigma_i^0$  перейдет в полоску  $\sigma_i^1 \subset \Pi^-$ , а кривые  $u_i^1$  и  $u_i^2$  — в кривые  $\bar{u}_i^1$  и  $\bar{u}_i^2$  соответственно, уравнения которых в силу (2.2) и (2.14) будут следующими

$$x = \lambda^i(x^* + bt + \dots), \quad \gamma^{-i}(y + \dots) = \mu + dt^2 + \dots, \quad (2.17)$$

где  $t$  пробегает значения из интервала (2.15) для кривой  $\bar{u}_i^1$  или из (2.16) для кривой  $\bar{u}_i^2$ . Поскольку  $\lambda > 0$ , то левые полукрестности кривых  $u_i^{1,2}$  будут отображаться налево (в сторону уменьшения  $x$ ) от  $\bar{u}_i^{1,2}$  соответственно.

Из (2.2), (2.10), (2.15), (2.16) и (2.17) видно, что кривые  $\bar{u}_i^{1,2}$  близки к прямым  $y = \text{const}$ . Именно, на этих кривых

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial (y_1, \mu)} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_1^2} \right\| = O(\lambda^i \gamma^{-i/2}). \quad (2.18)$$

При этом

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^1 : x &= \lambda^i x^+ + \lambda^i b \sqrt{\frac{\gamma^{-i} y^-}{d}} + \dots, \\ \bar{u}_i^2 : x &= \lambda^i x^+ - \lambda^i b \sqrt{\frac{\gamma^{-i} y^-}{d}} + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

(мы учли, что  $\mu \ll \gamma^{-i}$ ). Теперь из (2.12) следует, что кривые  $T_1(\bar{u}_i^1)$  и  $T_1(\bar{u}_i^2)$  касаются квадратично  $W_{\text{loc}}^s = \{y = 0\}$  при

$$\mu = \mu_i^{1,2} = |c| \lambda^i (x^+ \pm b \sqrt{\frac{\gamma^{-i} y^-}{d}} + \dots). \quad (2.20)$$

Эти кривые являются образами отрезков  $l_{1,2}$  на локальном неустойчивом многообразии (относительно нового глобального отображения  $T_1 T_0^i T_1$ ), т.е. данные значения  $\mu$  отвечают гомоклиническим касаниям. Из (2.12), (2.18) следует, что эти касания расщепляются с ненулевой скоростью при изменении  $\mu$ , так что семейство  $f_\mu$  трансверсально соответствующим бифуркационным пленкам.

Как уже отмечалось, при  $b > 0$  правая полуокрестность отрезка  $l_2$ , а при  $b < 0$  правая полуокрестность отрезка  $l_1$  отображаются под действием  $T_1$  налево от кривых  $u_i^2$  и  $u_i^1$ . Далее, под действием  $T_0^i$  они отображаются в левые полуокрестности кривых, соответственно,  $\bar{u}_i^2$  и  $\bar{u}_i^1$ , которые, в свою очередь (поскольку  $c < 0$ ), отображаются кверху от кривых  $T_1(\bar{u}_i^1)$  и  $T_1(\bar{u}_i^2)$  соответственно. Таким образом,  $\mu = \mu_i^1$  при  $b < 0$  и  $\mu = \mu_i^2$  при  $b > 0$  отвечают гомоклиническим касаниям третьего класса (см. рис. 6 для случая  $b > 0$ ).

Для завершения доказательства осталось рассмотреть случай касания первого класса (первые три столбца в таблице 1). Это означает, что  $\gamma > 0$  и  $d < 0$ , т.е. при  $\mu = 0$  мы имеем касание снизу (как на рис. 5(a) и 5(b)). При  $\mu < 0$  устойчивое и неустойчивое многообразия не имеют пересечений, а при  $\mu > 0$  появляется два трансверсальных пересечения, и кусок неустойчивого многообразия  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  заходит в область  $y > 0$ . Мы покажем, что при этом найдутся значения  $\mu > 0$ , при которых появляется гомоклиническое касание сверху; при этом семейство  $f_\mu$  будет трансверсально соответствующей бифуркационной поверхности. Такое касание либо само третьего класса (в случае  $\lambda < 0$  это всегда так) и тогда теорема доказана, либо принадлежит второму классу. Появление в этом случае касаний третьего класса при близких значениях параметра мы только что доказали.

Возьмем полосу  $\sigma_i^0$  с достаточно большим номером  $i$ . Рассмотрим такие  $\mu > 0$ , при которых вершина кривой  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  лежит внутри полосы  $\sigma_i^0$  (рис. 7 для случая  $\lambda > 0, c < 0$  и рис. 10(a) для случая  $\lambda > 0, c > 0$ ), т.е. (см. (2.6), (2.11))

$$\gamma^{-i}(y^- - \varepsilon_1) \leq \mu \leq \gamma^{-i}(y^- + \varepsilon_1).$$

Уравнение куска  $T_1^{-1}(W_{loc}^s \cap \Pi^+)$  устойчивого многообразия точки  $O$  вблизи точки  $M^-$  имеет вид (в (2.12) полагаем  $\bar{y}$  и используем также (2.10))

$$x = -\frac{\mu}{c} + \frac{|d|}{c}(y - y^-)^2 + \dots \quad (2.21)$$

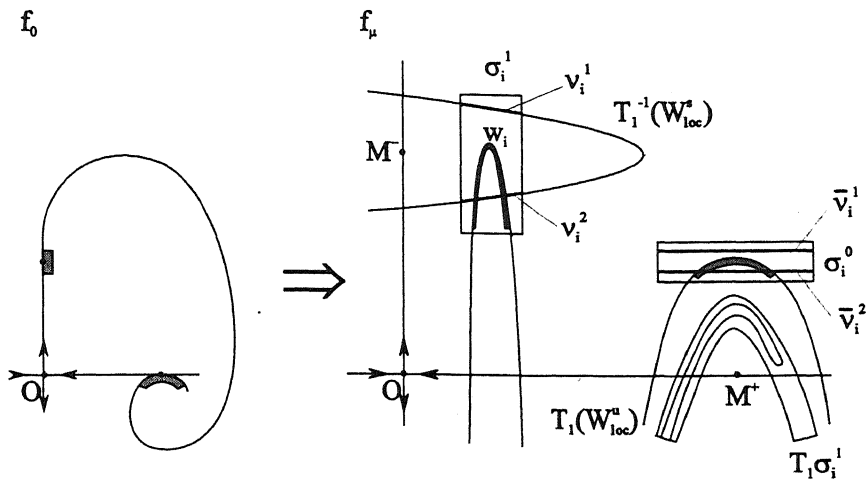


Рис. 7.

Поскольку  $\mu \sim \gamma^{-i} \gg |\lambda|^i$ , то эта кривая всегда имеет две компоненты связности,  $\nu_i^{1,2}$ , в пересечении с вертикальной полоской  $\sigma_i^1$ , которая находится на расстоянии порядка  $|\lambda|^i$  от  $y = 0$  (см. (2.6)). Согласно (2.2), (2.3), в окрестности точки  $M^+$  образы  $\tilde{\nu}_i^{1,2}$  этих компонент относительно отображения  $T_0^{-i}$  задаются параметрическим уравнением

$$\lambda^i(x + \dots) = -\frac{\mu}{c} + \frac{|d|}{c}t^2 + \dots, \quad y = \gamma^{-i}(y^- + t + \dots), \quad (2.22)$$

где  $t$  — параметр, пробегающий значения от  $-\varepsilon_1$  до  $\varepsilon_1$ ,  $x$  принимает значения вблизи  $x^+$ . Так как  $\mu \gg |\lambda|^i$ , то легко видеть, что кривые  $\tilde{\nu}_i^{1,2}$  близки (по меньшей мере в  $C^2$ , а также в  $C^1$  по  $\mu$ ) к прямым

$$y = \gamma^{-i}(y^- \pm \sqrt{\frac{\mu}{|d|}} + \dots).$$

Теперь очевидно (см. (2.11)), что  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  имеет квадратичное касание с кривыми  $\tilde{\nu}_i^{1,2}$  при

$$\mu = \mu_i^\pm = \gamma^{-i}(y^- \pm \sqrt{\frac{\gamma^{-i}}{|d|}} + \dots).$$

При обоих значениях  $\mu$  кривая  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  касается соответствующей кривой  $\tilde{\nu}_i^{1,2}$  снизу, т.е. со стороны, отвечающей

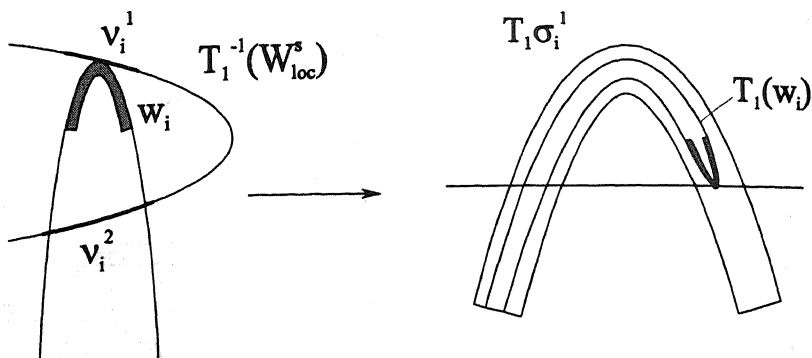


Рис. 8.

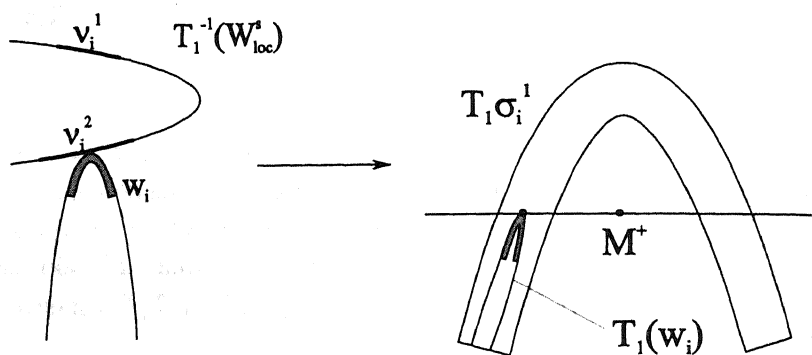


Рис. 9.

уменьшению  $y$ . Так как  $\gamma > 0$ , то образ  $T_0^i T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  также примыкает к  $T_1^{-1}(W_{loc}^s \cap \Pi^+)$  снизу в обоих случаях (рис. 8, 9 и 10). Это означает, что кусок  $T_1 T_0^i T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  неустойчивого многообразия  $W^u$  касается  $W_{loc}^s$  с разных сторон при  $\mu = \mu_i^+$  и  $\mu = \mu_i^-$ . Таким образом, одно из этих касаний будет первого класса (как исходное) (рис. 9 и 10(b)), а другое — либо второго (рис. 10(c)), либо третьего класса (рис. 8), что завершает доказательство теоремы.

### § 3. Нетривиальные гиперболические подмножества систем с гомоклиническим касанием третьего класса

Прежде чем начинать изучение множества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности негрубой гомоклинической траектории, мы уточним выбор такой окрестности. Он полнос-



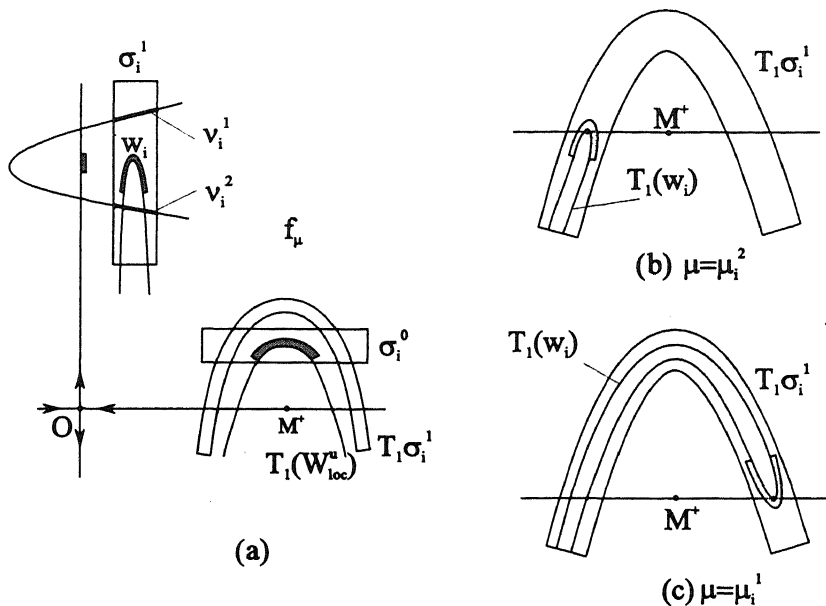


Рис. 10.

тью определяется выбором окрестностей  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  гомоклинических точек  $M^+$  и  $M^-$ , который удобен, прежде всего, в техническом плане. Именно, окрестности выберем таким образом, чтобы для некоторого достаточно большого  $\bar{k}$  они содержали целиком все полоски  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$  с номерами  $k \geq \bar{k}$  и не пересекались с полосками, номера которых меньше  $\bar{k}$ . Соответствующая окрестность называется *специальной*, ее построение приведено, например, в [5], [11].

Схематически, специальная окрестность строится следующим образом (рис. 11). Первоначальные произвольно выбранные малые окрестности  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  мы еще уменьшаем, выбрасывая из них "все лишнее". Именно, выбрасываются точки, которые попадают из  $\Pi^+$  в  $\Pi^-$  меньше, чем за  $\bar{k}$  итераций отображения  $T_0$ , и которые попадают из  $\Pi^-$  в  $\Pi^+$  меньше, чем за  $\bar{k}$  итераций отображения  $T_0^{-1}$ . Таким образом, в силу (2.2) мы оставляем в  $\Pi^+$  только такие точки, для которых  $|y| \leq |\gamma|^{-\bar{k}}(y^- + \varepsilon_1)$ , и в  $\Pi^-$  — только точки, для которых  $|x| \leq |\lambda|^{\bar{k}}(x^+ + \varepsilon_0)$ .

Далее, в  $\Pi^+$  оставляем только такую "минимальную" прямоугольную окрестность точки  $M^+$ , которая содержит  $T_1(\Pi^-) \cap \Pi^+$ , а в  $\Pi^-$  — ту, которая содержит  $T_1^{-1}(\Pi^+) \cap \Pi^-$  (см. рис.11).

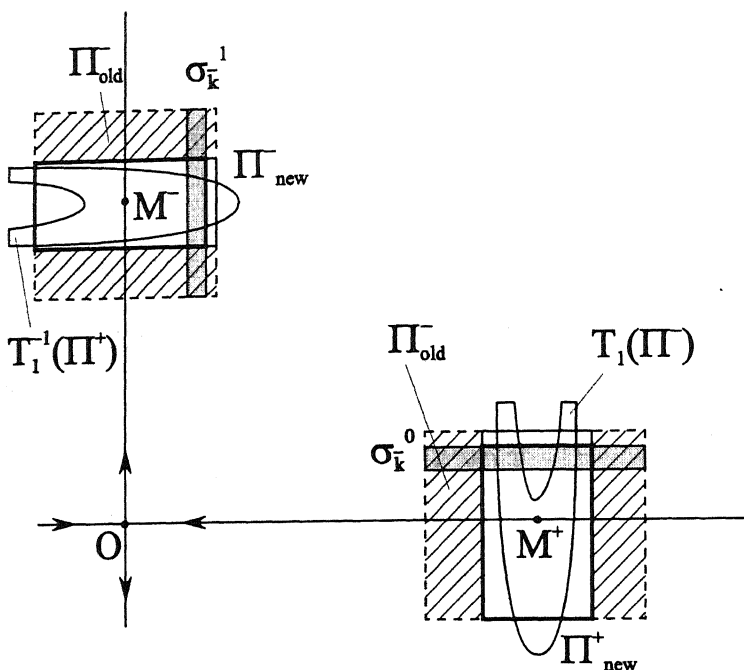


Рис. 11.

Как результат получаем (см. [5], [11]), что в качестве  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  можно, не ограничивая общности, выбрать

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \{(x, y) \mid |x - x^+| \leq \rho_{\bar{k}}, |y| \leq |\gamma|^{-\bar{k}}(y^- + \rho_{\bar{k}})\}, \\ \Pi^- &= \{(x, y) \mid |x| \leq |\lambda|^{\bar{k}}(x^+ + \rho_{\bar{k}}), |y - y^-| \leq \rho_{\bar{k}}\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\rho_{\bar{k}} = C|\gamma|^{-\bar{k}/2}$  и  $C$  — некоторая положительная константа, не зависящая от  $\bar{k}$ .

Образы  $T_1\sigma_{\bar{k}}^1$  полосок  $\sigma_{\bar{k}}^1$  имеют вид подков (см. рис.12), накатывающихся при  $k \rightarrow \infty$  к куску  $l_u = T_1(W_{loc}^u) \cap \Pi^+$  неустойчивого многообразия точки  $O$ . Очевидно, что траектории из множества  $N$  (множества всех траекторий, целиком лежащих в специальной окрестности) должны пересекать  $\Pi^+$  в точках пересечения подков  $T_1\sigma_i^1$  и полосок  $\sigma_j^0$  для всевозможных  $i, j \geq \bar{k}$ . Таким образом, ясно, что структура множества  $N$  существенно зависит от характера таких пересечений.

Непустое пересечение подковы и полоски может быть правильным и неправильным (различные типы пересечений пока-

заны на рис. 13). Именно, пересечение подковы  $T_1\sigma_i^1$  с полоской  $\sigma_j^0$  является *правильным*, если множество  $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$  состоит из двух компонент связности,  $\sigma_{ji}^{01}$  и  $\sigma_{ji}^{02}$  (рис. 14), и отображение  $\tilde{T}_i \equiv T_1T_0^i$  в ограничении на прообразы  $\tilde{T}_i^{-1}\sigma_{ji}^{01}$  и  $\tilde{T}_i^{-1}\sigma_{ji}^{02}$  (подполоски  $\sigma_i^{01}$  и  $\sigma_i^{02}$  на  $\sigma_i^0$ ) является седловым в смысле [18] (т.е. сжимающим по координате  $x$  и растягивающим по  $y$ ; см. точное определение ниже).

Следующий результат установлен в [5] (см. также [11], [12]).

**Лемма 1.** *Существуют достаточно большое  $\bar{k}$  и положительная константа  $S_1$ , зависящая только от  $f_0$  и не зависящая от  $\bar{k}$ , такие, что если для некоторых целых  $i, j \geq \bar{k}$ :*

1) *выполняется неравенство*

$$d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] > S_{\bar{k}}(i, j), \quad (3.2)$$

где  $S_{\bar{k}}(i, j) = S_1(|\lambda|^i + |\gamma|^{-j}) \cdot |\gamma|^{-\bar{k}/2}$ , *то пересечение подковы  $T_1\sigma_i^1$  с полоской  $\sigma_j^0$  правильное;*

2) *если для некоторых целых  $i, j \geq \bar{k}$  выполняется неравенство*

$$d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] < -S_{\bar{k}}(i, j), \quad (3.3)$$

то  $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 = \emptyset$ .

Удобно также переформулировать эту лемму следующим образом: если подкова  $T_1\sigma_i^1$  имеет неправильное пересечение с полоской  $\sigma_j^0$  (т.е. если, например, пересечение  $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$  состоит из одной компоненты связности, или соответствующие отображения не являются седловыми), то с необходимостью

$$|d| \cdot |\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+| \leq S_{\bar{k}}(i, j). \quad (3.4)$$

Также если  $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 \neq \emptyset$ , то выполнено неравенство

$$d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] \geq -S_{\bar{k}}(i, j). \quad (3.5)$$

Неравенства (3.2)–(3.5) имеют сравнительно простой геометрический смысл. Полоска  $\sigma_j^0$  — это тонкий горизонтальный прямоугольник на  $\Pi^+$  с центральной линией  $y = \gamma^{-j}y^-$ , полоска  $\sigma_i^1$  — тонкий вертикальный прямоугольник на  $\Pi^-$  с центральной линией  $x = \lambda^i x^+$ . В силу (2.2) полоска  $\sigma_i^1$  отображается под действием  $T_1$  в подкову, у которой парабола  $y = c\lambda^i x^+ + d((x - x^+)/b)^2$  является центральной линией. Условие

$d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] > 0$  означает, что прямая  $y = \gamma^{-j}y^-$  и указанная парабола пересекаются в двух точках, а условие  $d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] < 0$  — что они не пересекаются. Коэффициент  $S_{\bar{k}}(i, j)$  в (3.2)–(3.5) учитывает ненулевую толщину полоски и подковы.

Напомним, что для того чтобы пересечение было правильным, необходимо также проверить, что отображение  $\tilde{T}_i = T_1 T_0^i$  — седловое на  $\tilde{T}_i^{-1}\sigma_{ji}^{01}$  и  $\tilde{T}_i^{-1}\sigma_{ji}^{02}$ . Мы будем придерживаться следующего определения: отображение  $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$  (где  $(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1$ ,  $(x_2, y_2) \in X_2 \times Y_2$  и  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  — некоторые замкнутые подмножества банаховых пространств) является седловым, если  $x_2$  и  $y_1$  однозначно определяют по любым  $x_1 \in X_1$ ,  $y_2 \in Y_2$  и при этом отображение соответствия  $(x_1, y_2) \mapsto (x_2, y_1)$  (т.н. перекрестное отображение) является сжимающим в метрике  $\max\{\|x\|, \|y\|\}$ .

Заметим, что непосредственно из определения следует, что композиция седловых отображений сама является седловым отображением. Также очевидно, что для любой функции  $y_1 \mapsto x_1$  с константой Липшица  $\leq 1$  седловое отображение переводит ее график в график функции  $y_2 \mapsto x_2$ , определенной при всех  $y_2 \in Y_2$ , и липшицевой с константой Липшица, равномерно меньшей 1, при этом отображение растягивает по  $y$ . Точно так же обратное отображение переводит график любой функции  $x_2 \mapsto y_2$  с константой Липшица  $\leq 1$  в график функции  $x_1 \mapsto y_1$ , определенной при всех  $x_1 \in X_1$ , и липшицевой с константой Липшица, равномерно меньшей 1, при этом оно растягивает по  $x$ . Отсюда следует, что для седлового отображения, действующего из произведения  $X \times Y$  в него же, его неподвижная точка<sup>1)</sup> грубая седловая (гиперболическая), причем ее устойчивое и неустойчивое многообразия являются графиками функций (соответственно,  $x \mapsto y$  и  $y \mapsto x$ ), определенных при всех  $x \in X$  (соответственно  $y \in Y$ ) и имеющих константу Липшица  $< 1$ .

Очевидно, что определение седлового отображения чувствительно к выбору координат в  $X_1 \times Y_1$  и  $X_2 \times Y_2$ . На полосках  $\sigma_i^0$  используем координаты, введенные следующим образом. Прежде всего, для любой точки  $(x_0, y_0) \in \sigma_i^0$  пусть  $(x_i, y_i) = T_0^i(x_0, y_0)$ . Тогда, согласно (2.2), величины  $x_i$  и  $y_0$  однозначно определяются по  $(x_0, y_i)$ , поэтому  $(x_0, y_i)$  могут быть выбраны в качестве координат на  $\sigma_i^0$ . Обозначим такие координаты  $(x', y')$  (при этом  $|x' - x^+| \leq \rho_{\bar{k}}, |y' - y^-| \leq \rho_{\bar{k}}$ ; см. (3.1)).

Из (2.2), (2.5) получаем следующее соотношение для отобра-

<sup>1)</sup>Такая точка существует и единственна в силу принципа сжимающих отображений — неподвижные точки исходного и перекрестного отображения, очевидно, совпадают.

жения  $\tilde{T}_i$  в ограничении на  $\tilde{T}_i^{-1}(T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0)$ :

$$\begin{aligned} \bar{x}' - x^+ &= a(\lambda^i x' + \lambda^i \xi_i(x', y')) + b(y' - y^-) + \dots, \\ \gamma^{-j} \bar{y}' + \gamma^{-j} \eta_j(\bar{x}', \bar{y}') &= \\ &= c(\lambda^i x' + \lambda^i \xi_i(x', y')) + d(y' - y^-)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если неравенство (3.2) выполнено с подходящим  $S_1$ , то соотношение (3.6) может быть переписано в перекрестном виде

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= x^+ + \lambda^i(x' + \dots) \pm b \sqrt{\gamma^{-j}(\frac{1}{d}\bar{y}' + \dots) - \lambda^i(\frac{c}{d}x' + \dots)}, \\ y' &= y^- \pm \sqrt{\gamma^{-j}(\frac{1}{d}\bar{y}' + \dots) - \lambda^i(\frac{c}{d}x' + \dots)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где знаки “+” и “-” отвечают отображению  $\tilde{T}_i$  на компонентах  $\tilde{T}_i^{-1}\sigma_{ji}^{01}$  и  $\tilde{T}_i^{-1}\sigma_{ji}^{02}$  соответственно. Многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при  $i, j \rightarrow +\infty$ . Очевидно, если выполнено (3.2), то перекрестное отображение (3.7) сжимающее и, следовательно, отображение  $\tilde{T}_i|_{\tilde{T}_i^{-1}(T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0)}$  действительно седловое.

Лемма 1 позволяет дать весьма детальное описание структуры гиперболических подмножеств в окрестности гомоклинического касания. Заметим, что для каждой траектории из множества  $N \setminus O$  можно естественным образом определить ее кодировку — последовательность натуральных чисел

$$(\dots, k_{-s}, \dots, k_s, \dots), \quad (3.8)$$

где  $k_s$  ( $k_s \geq \bar{k}$ ) — номер полосы, которой принадлежит  $s$ -я точка  $M_s$  пересечения траектории с  $\Pi^+$ . Траекториям из  $N$ , которые не лежат ни в устойчивом, ни в неустойчивом многообразиях точки  $O$ , отвечают бесконечные в обе стороны кодировки. Для траекторий из  $W^s$  последняя точка пересечения с  $\Pi^+$  принадлежит  $W_{loc}^s$  и ее дальнейшие итерации под действием  $T_0$  не покидают малую окрестность точки  $O$  (и стремятся к  $O$ ). Соответственно, кодировки таких траекторий конечны справа и мы будем завершать их символом  $+\infty$ . Для траекторий из  $W^u$  (т.е.  $\alpha$ -предельных к  $O$ ) их кодировки конечны слева и начинаются с символа  $+\infty$ . Для гомоклинических к  $O$  (т.е. принадлежащих пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий) траекторий их кодировки конечны с обеих сторон.

Пару целых чисел  $(k_s, k_{s+1})$  с  $k_s \geq \bar{k}$ ,  $k_{s+1} \geq \bar{k}$  назовем *недопустимой*, если при  $j = k_s, i = k_{s+1}$  выполнено неравенство (3.3); в противном случае (выполнено неравенство (3.5)) назовем пару *допустимой*. Допустимую пару  $(k_s, k_{s+1})$ , для которой выполнено неравенство (3.2) (при  $j = k_s, i = k_{s+1}$ ), назовем *правильной*. Последовательность  $\{k_s\}$  целых чисел с  $k_s \geq \bar{k}$  назовем

допустимой, если любая пара  $(k_s, k_{s+1})$  в ней допустима. Наконец, допустимую последовательность назовем *правильной*, если любая пара  $(k_s, k_{s+1})$  правильна. Очевидно, что в случае касания второго класса  $(\gamma > 0, \lambda > 0, d > 0, c < 0)$  все последовательности с  $k_s \geq \bar{k}$  правильны (за исключением последовательности  $(+\infty, +\infty)$  — это кодировка исходной траектории гомоклинического касания  $\Gamma_0$ ), если  $\bar{k}$  достаточно велико. Для касаний первого класса  $(\gamma > 0, d < 0)$  любая пара  $(i, j)$  с  $j \leq i$  недопустима (в силу того, что  $|\lambda\gamma| < 1$ ), поэтому здесь не существует бесконечных влево допустимых последовательностей;<sup>1)</sup> единственная возможная здесь допустимая последовательность, ограниченная слева символом  $+\infty$ , — это  $(+\infty, +\infty)$ .

Для систем с гомоклиническими касаниями третьего класса множество допустимых/правильных последовательностей имеет нетривиальную структуру.

В случае  $\gamma > 0, \lambda > 0, c > 0, d > 0$  (пятый столбец табл. 1), прологарифмировав неравенства (3.2) и (3.5), мы видим, что пара  $(i, j)$  допустима, если

$$j \leq i\theta - \tau + S|\gamma|^{-\bar{k}/2}, \quad (3.9)$$

и правильна, если

$$j < i\theta - \tau - S|\gamma|^{-\bar{k}/2}, \quad (3.10)$$

где

$$\theta = -\frac{\ln|\lambda|}{\ln|\gamma|}, \quad \tau = \frac{1}{\ln|\gamma|} \ln\left|\frac{cx^+}{y^-}\right|,$$

$S$  — некоторая положительная константа.

В случае  $\lambda > 0, \gamma < 0, c > 0, d > 0$  (шестой столбец табл.1), как вытекает из (3.2)–(3.5), любые пары  $(i, j)$  с нечетным  $i$  недопустимы, а пары с четным  $i$  допустимы (правильны), если выполнено неравенство (3.9) (соответственно, (3.10)).

В случае  $\lambda > 0, \gamma < 0, c < 0, d > 0$  (седьмой столбец табл. 1), любая пара  $(i, j)$  с четным  $i$  правильна, а с нечетным  $i$  допустима, если выполнено неравенство

$$j \geq i\theta - \tau - S|\gamma|^{-\bar{k}/2}, \quad (3.11)$$

и правильна, если выполнено неравенство

$$j > i\theta - \tau + S|\gamma|^{-\bar{k}/2}. \quad (3.12)$$

В случае  $\gamma > 0, \lambda < 0, d > 0, c > 0$  (восьмой столбец табл. 1), любая пара  $(i, j)$  с нечетным  $j$  правильна, а пара с четным  $j$

<sup>1)</sup>Здесь в допустимой последовательности значения  $k_s$  должны убывать с уменьшением  $s$ , но  $k_s \geq \bar{k}$  по условию.

допустима (правильна), если выполнено неравенство (3.9) (соответственно, (3.10)).

В случае  $\gamma < 0, \lambda < 0, c > 0, d > 0$  (девятый столбец табл. 1), пары  $(i, j)$  с четным  $i$  и нечетным  $j$  являются всегда правильными, а с нечетным  $i$  и четным  $j$  — всегда недопустимыми; пары  $(i, j)$  с четными  $i$  и  $j$  допустимы (правильны), если выполнено неравенство (3.9) (соответственно, (3.10)); пары  $(i, j)$  с нечетными  $i$  и  $j$  допустимы (правильны), если выполнено неравенство (3.11) (соответственно, (3.12)).

Наконец, в случае  $\gamma < 0, \lambda < 0, c < 0, d > 0$  (десятый столбец табл. 1), пары  $(i, j)$  с четными  $i$  и  $j$  являются всегда правильными, а с нечетными  $i$  и  $j$  — всегда недопустимыми; пары  $(i, j)$  с нечетным  $i$  и четным  $j$  допустимы (правильны), если выполнено неравенство (3.9) (соответственно, (3.10)); пары  $(i, j)$  с четным  $i$  и нечетным  $j$  допустимы (правильны), если выполнено неравенство (3.11) (соответственно, (3.12)).

Следующая теорема является усиленной версией теоремы из [4].

**Теорема 2.** 1) Для любой траектории из  $N \setminus O$  ее кодировка допустима.

2) Для любой бесконечной правильной последовательности  $\mathcal{K} = \{k_s\}$  в  $N$  существует континуум траекторий с кодировкой  $\mathcal{K}$ , а если  $\mathcal{K}$  — конечная правильная последовательность длины  $n$ , то в  $N$  имеется ровно  $2^{n-1}$  грубых гомоклинических к  $O$  траекторий с кодировкой  $\mathcal{K}$ . Именно, для любой последовательности  $\{\alpha_s\}$ , составленной из символов "1" и "2", существует единственная траектория, последовательные точки  $M_s$  пересечения которой с  $\Pi^+$  лежат в компонентах  $\sigma_{k_s, k_{s-1}}^{0\alpha_s}$  пересечения  $T_1\sigma_{k_{s-1}}^1 \cap \sigma_{k_s}^0$ .

**Доказательство.** По определению,

$$M_s \in T_1\sigma_{k_{s-1}}^1 \cap \sigma_{k_s}^0, \quad (3.13)$$

где  $\{M_s\}$  — последовательность точек пересечения траектории с  $\Pi^+$ , а  $\{k_s\}$  — кодировка траектории. Заметим, что это соотношение имеет смысл и в случае конечных (влево или вправо) кодировок при  $\sigma_\infty^1 \equiv W_{\text{loc}}^u \cap \Pi^-$  и  $\sigma_\infty^0 \equiv W_{\text{loc}}^s \cap \Pi^+$ .

Теперь утверждение пункта 1 теоремы немедленно следует из (3.13) и пункта 2 леммы 1. Чтобы доказать пункт 2 теоремы, заметим, что если последовательность  $\mathcal{K}$  правильная, то, как следует из пункта 1 леммы 1, для любой пары  $(k_{s-1}, k_s)$  пересечение  $T_1\sigma_{k_{s-1}}^1 \cap \sigma_{k_s}^0$  состоит из двух компонент,  $\sigma_{k_s k_{s-1}}^{01}$  и  $\sigma_{k_s k_{s-1}}^{02}$ . Поэтому траектория имеет кодировку  $\mathcal{K}$  тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности  $\{\alpha_s\}$  из единиц

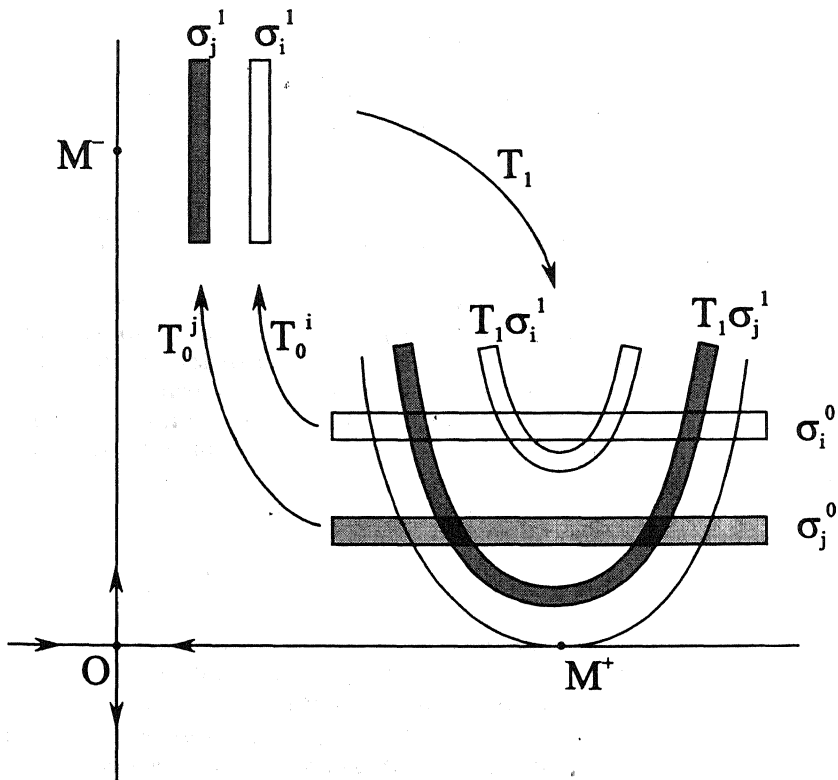


Рис. 12.

и двоек

$$M_s \in \sigma_{k_s k_{s-1}}^{0\alpha_s} \quad (3.14)$$

для всех точек  $M_s$ . По определению,

$$M_s = \tilde{T}_{k_{s-1}} M_{s-1}; \quad (3.15)$$

при этом так как пара  $(k_{s-1}, k_s)$  правильная, то отображение  $\tilde{T}_{k_{s-1}}$  — седловое на  $\sigma_{k_s k_{s-1}}^{0\alpha_s}$ .

Таким образом, для каждой правильной последовательности  $\mathcal{K}$  и каждой последовательности  $\{\alpha_s\}$  мы имеем последовательность пространств  $\sigma_{k_s k_{s-1}}^{0\alpha_s}$  и седловых отображений  $\tilde{T}_{k_s}$ , действующих из  $\sigma_{k_s k_{s-1}}^{0\alpha_s}$  в  $\sigma_{k_{s+1} k_s}^{0\alpha_{s+1}}$ . Теперь если  $\mathcal{K}$  бесконечна в обе стороны, то существование и единственность последовательности  $M_s$ , удовлетворяющей (3.14), (3.15), следует из леммы [18] о



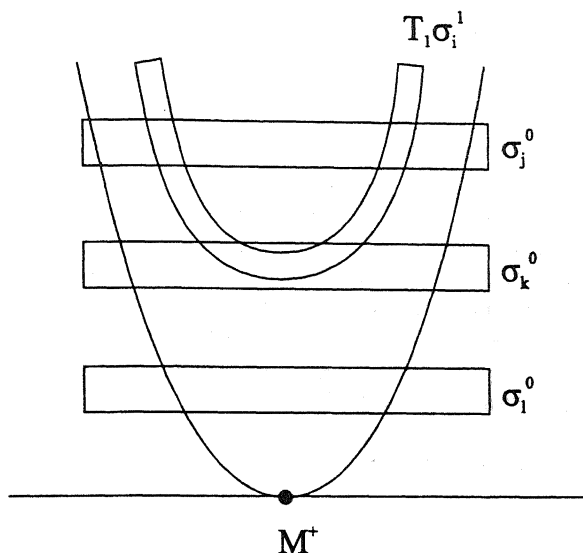


Рис. 13.

неподвижной точке последовательности седловых отображений в счетном произведении пространств<sup>1)</sup>.

Чтобы доказать теорему для случая конечной влево правильной последовательности  $\mathcal{K}$ , заметим, что кривая  $T_1(W_{loc}^u \cap \Pi^-)$  в пересечении с любой полоской  $\sigma_j^0$  такой, что пара  $(+\infty, j)$  правильная, задается первой формулой в (3.7), в которой нужно положить  $i = +\infty$ . Следовательно, это вертикальная кривая, т.е. кривая вида  $x' = \varphi(y')$ , где функция  $\varphi$  определена при всех  $y'$  и имеет константу Липшица меньше 1. По свойству седловых отображений все дальнейшие образы  $W_{loc}^u \cap \Pi^-$ , определяемые по правилу

$$l_s = (\tilde{T}_{k_{s-1}} l_{s-1}) \cap \sigma_{k_s k_{s-1}}^{0\alpha_s}, \quad l_1 = \sigma_{k_1 + \infty}^{0\alpha_1}$$

также являются вертикальными кривыми и отображения  $\tilde{T}_{k_s}|_{l_s}$  растягивают по  $y'$ . Из леммы о неподвижной точке последовательности сжимающих отображений в счетном произведении пространств [18], примененной к последовательности

$$l_1 \xleftarrow{\tilde{T}_{k_1}^{-1}} l_2 \xleftarrow{\tilde{T}_{k_2}^{-1}} \dots \xleftarrow{\tilde{T}_{k_{s-1}}^{-1}} l_s \xleftarrow{\tilde{T}_{k_s}^{-1}} \dots,$$

<sup>1)</sup>Мы ищем последовательность точек  $(x'_s, y'_s) \in \sigma_{k_s k_{s-1}}^{0\alpha_s}$  таких, что  $\tilde{T}_{k_s}(x'_s, y'_s) \equiv (\bar{x}'_{s+1}, \bar{y}'_{s+1}) = (x'_{s+1}, y'_{s+1})$ , но так как отображения  $\tilde{T}_{k_s}$  все седловые, то перекрестное отображение  $(\{x_s\}, \{y_s\}) \mapsto (\{\bar{x}_s\}, \{y_s\})$ , сжимающее в пространстве последовательностей с нормой  $\max_s \max\{|x_s|, |y_s|\}$ .

следует, что существует и единственна последовательность точек  $M_s$  такая, что

$$M_s \in l_s, \quad M_{s+1} = \tilde{T}_{k_s} M_s.$$

По построению, это в точности последовательность точек пересечения с  $\Pi^+$  траектории с кодировкой  $K$ , существование и единственность которой для каждой заданной последовательности  $\{\alpha_s\}$  утверждается в п. 2 теоремы 2.

В случае конечной справа правильной последовательности  $K$ , доказательство аналогично — здесь соответствующие прообразы  $W_{loc}^s \cap \Pi^+$  являются *горизонтальными кривыми*, т.е. кривыми вида  $y' = \psi(x')$ , где функция  $\psi$  определена при всех  $x'$  и имеет константу Липшица меньше 1.

Наконец, в случае конечной правильной последовательности  $K$  гомоклинические точки находятся как единственные точки трансверсального пересечения соответствующих вертикальной (образ  $W_{loc}^u \cap \Pi^-$ ) и горизонтальной (прообраз  $W_{loc}^s \cap \Pi^+$ ) кривых. Теорема доказана.

Обозначим через  $\tilde{N}$  построенное в теореме 2 множество траекторий из  $N$  с правильными кодировками. Для траектории из  $\tilde{N}$  с кодировкой  $\{k_s\}$  можно построить ее *уточненную кодировку* — последовательность из символов “0”, “1” и “2”, которая получается из первоначальной кодировки заменой каждого символа  $k_s$  на последовательность  $\underbrace{0 \dots 0}_{k_s} 1$  или  $\underbrace{0 \dots 0}_{k_s} 2$  в зависимости

от того, какой из компонент  $\sigma_{k_{s+1}k_s}^{01}$  или  $\sigma_{k_{s+1}k_s}^{02}$  принадлежит соответствующая точка  $M_{s+1}$  пересечения траектории с  $\Pi^+$  (если первое слева (последнее справа)  $k_s = +\infty$ , то мы заменяем его просто на бесконечную последовательность нулей). По теореме 2 траектории из  $\tilde{N}$  восстанавливаются по уточненной кодировке однозначно. Поэтому если мы определим динамическую систему на множестве точек пересечения траекторий из  $\tilde{N}$  с малой окрестностью  $U_0$  точки  $O$  следующим образом: на точках из  $U_0 \setminus \Pi^-$  действует отображение  $T_0$ , а на  $\Pi^-$  — отображение  $T_1$ , то полученная система будет топологически сопряженной с отображением сдвига на множестве уточненных кодировок.

В частности, периодической кодировке отвечает периодическая траектория. Каждая точка пересечения этой траектории с  $\Pi^+$  является неподвижной точкой для произведения последовательности седловых отображений за период кодировки. Поскольку такое произведение само является седловым отображением, то данная периодическая траектория является грубой седловой и для каждой точки ее пересечения с  $\Pi^+$  устойчивое и неустойчивое многообразия являются горизонтальной и вертикальной кривыми соответственно. Кодировкам, асимптотически периодичес-

ким с обеих сторон, отвечают гетероклинические (или гомоклинические) траектории трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий соответствующих периодических траекторий.

Отметим, что, вообще, для каждой траектории из  $\tilde{N}$  у любой точки пересечения ее с  $\Pi^+$  есть устойчивое и неустойчивое многообразия, являющиеся соответственно горизонтальной и вертикальной кривыми, т.е. все траектории из  $\tilde{N}$  седловые и множество  $\tilde{N}$  (неравномерно) гиперболично [4], [5].

Хотя множество  $\tilde{N}$  может и не совпадать со всем множеством  $N \setminus \{O, \Gamma_0\}$ , оно в любом случае хорошо его аппроксимирует. Действительно, траектории неседлового типа из  $N$  должны иметь как минимум две последовательные точки пересечения с  $\Pi^+$ , принадлежащие полоскам  $\sigma_i^0$  и  $\sigma_j^0$ , номера которых должны удовлетворять неравенству

$$|j - i\theta + \tau| \leq \hat{S}|\gamma|^{-\bar{k}/2}, \quad (3.16)$$

эквивалентному (3.4). Решения последнего неравенства даются множеством точек  $(i, j)$  (с целочисленными координатами), лежащих в узкой полосе на плоскости (чем больше  $\bar{k}$ , тем уже эта полоса). Ясно, что структура этого множества существенно зависит от  $\theta$  и  $\tau$ . Например, в случае, когда  $\theta$  рационально,  $\theta = p/q$ , и  $\tau q \notin \mathbb{Z}$ , оно будет пусто при достаточно большом  $\bar{k}$  (зависящем от  $\theta$  и  $\tau$ ). В этом случае, как легко видеть, множество допустимых кодировок (без  $(+\infty, +\infty)$ ) совпадает с множеством правильных кодировок и имеет следующий результат, полученный ранее в [5].

Пусть  $\theta = p/q$  и  $\tau q \notin \mathbb{Z}$ . Тогда существует такое  $\bar{k} = \bar{k}(\theta, \tau)$ , что  $N \setminus \{L_0, \Gamma_0\} = \tilde{N}$ , т.е. все траектории из  $N \setminus \Gamma_0$  седловые.

С геометрической точки зрения, то обстоятельство, что множество целочисленных решений неравенства (3.16) пусто при рациональном  $\theta$  и подходящих  $\tau$ , означает, что при таких  $\theta$  и  $\tau$  вершины всех подков попадают в промежутки между полосками. Так как число полосок бесконечно, эта ситуация не является грубой. Так, если  $\theta$  иррационально, то неравенство (3.16) имеет счетное множество целочисленных решений при любом  $\bar{k}$ . Следовательно, в этом случае счетное множество полосок и подков могут иметь неправильные пересечения, что ведет к весьма нетривиальной динамике, рассматриваемой ниже. Для нас важно, что при сколь угодно малом изменении  $\theta$  множества целочисленных решений неравенств (3.9)–(3.12) меняются и, как следует из теоремы 2, с необходимостью изменяются множества  $N$  и  $\tilde{N}$ .

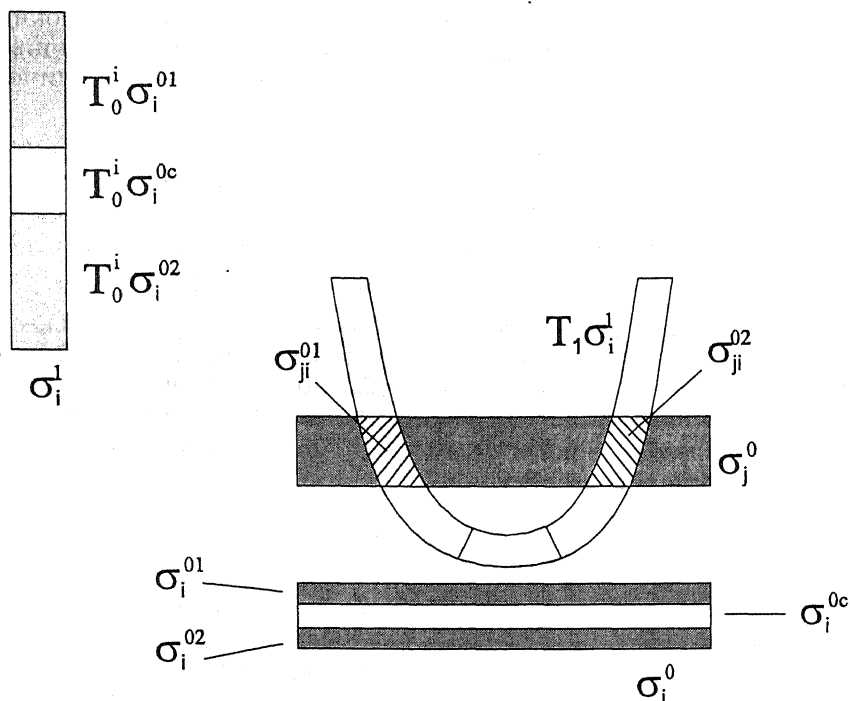


Рис. 14.

#### § 4. Сосуществование гомоклинических касаний третьего класса

Пусть  $f_0$  — система, имеющая седловую периодическую траекторию  $L_0$  и негрубую гомоклиническую к  $L_0$  траекторию  $\Gamma_0$  третьего класса. Множество систем  $f$ , которые  $C^r$ -близки к  $f_0$  и имеют негрубую гомоклиническую траекторию  $\Gamma$ , близкую к  $\Gamma_0$ , образует гладкое банахово подмногообразие  $H$  коразмерности один.

Рассмотрим однопараметрическое семейство  $f_\nu$  систем на  $H$ , содержащее  $f_0$ . Мы предположим, что величина  $\theta = -\ln |\lambda| / \ln |\gamma|$  меняется монотонно с изменением  $\nu$ , т.е.

$$\theta'(\nu) \neq 0. \quad (4.1)$$

Как мы отмечали в предыдущем параграфе, множества целочисленных решений неравенств (3.9)–(3.12) меняются при сколь угодно малом изменении  $\theta$ . Следовательно, при сколь угодно малом изменении значений параметра должны происходить бифуркации в множестве  $N$  всех траекторий, лежащих в малой окрестности  $U$  множества  $L_0 \cup \Gamma_0$ . Так, имеет место следующий результат.

В интервале изменения  $\nu$  плотны подмножества  $B_1^+, B_1^-, B_2$  такие, что:

1) при  $\nu \in B_1^+$  система  $f_\nu$  имеет негрубую двуухобдную<sup>1)</sup> периодическую траекторию типа седло-узел и при  $\nu \in B_1^-$  — негрубую двуухобдную периодическую траекторию с мультипликатором, равным  $-1$ ;

2) при  $\nu \in B_2$  система  $f_\nu$  имеет бесконечно много устойчивых двуухобдных периодических траекторий в  $U$ .

Пункт 1) был доказан в [4], [12], пункт 2) — в [12]. Наши дальнейшие рассуждения основаны на следующем результате того же сорта.

**Теорема 3** ([11]). В интервале изменения  $\nu$  плотны значения параметра, при которых  $f_\nu$  имеет в  $U$  отличную от  $\Gamma$  траекторию квадратичного гомоклинического касания.

**Доказательство.** Возьмем произвольные  $\nu_1 \neq \nu_2$ , достаточно близкие так, что  $\theta_1 \equiv \theta(\nu_1) \neq \theta(\nu_2) \equiv \theta_2$ , и предположим для определенности, что  $\theta_1 > \theta_2$ . Рассмотрим сначала случай  $\lambda > 0, \gamma > 0, c > 0, d > 0$  (рис. 5(d)).

Заметим, что для сколь угодно большого  $\bar{k}$  существуют целые  $i \geq \bar{k}$  и  $j \geq \bar{k}$  такие, что:

1) пары  $(i, i)$  и  $(j, i)$  правильны при всех  $\nu$ , т.е. подковы  $T_1\sigma_i^1$  и  $T_1\sigma_j^1$  пересекают полосу  $\sigma_i^0$  правильно (рис. 15);

2) при  $\nu = \nu_1$  пара  $(i, j)$  правильна, а при  $\nu = \nu_2$  недопустима, т.е. при  $\nu = \nu_1$  подкова  $T_1\sigma_i^1$  пересекает полосу  $\sigma_j^0$  правильно (рис. 15(a)), а при  $\nu = \nu_2$  — вообще не пересекает ее (рис. 15(b)).

Для этого (см. предыдущий параграф) достаточно выбрать  $i \geq \bar{k}$  и  $j \geq \bar{k}$  так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$j - i\theta_1 + \tau(\nu_1) < -S|\gamma(\nu_1)|^{-\bar{k}/2} \quad (4.2)$$

и

$$j - i\theta_2 + \tau(\nu_2) > S|\gamma(\nu_2)|^{-\bar{k}/2}, \quad (4.3)$$

где (4.2) эквивалентно (3.2), а (4.3) эквивалентно (3.3). Ясно, что для любых  $\theta_1 > \theta_2$  множество таких пар  $(i, j)$  счетно. Зафиксируем одну из таких пар и обозначим ее как  $(i^*, j^*)$ .

Пусть  $p_i$  — точка на полоске  $\sigma_i^0$ , которая является неподвижной для отображения  $T_i \equiv T_1 T_0^i : \sigma_i^0 \rightarrow \sigma_i^0$  первого возвращения. Вообще, для каждого достаточно большого  $i$  в рассматриваемом случае таких точек ровно две. В классе диффеоморфизмов на  $H$  они обе грубые седловые. Пусть  $p_i$  — одна из них.

<sup>1)</sup>Т.е. пересекающую  $\Pi^+$  ровно в двух точках.

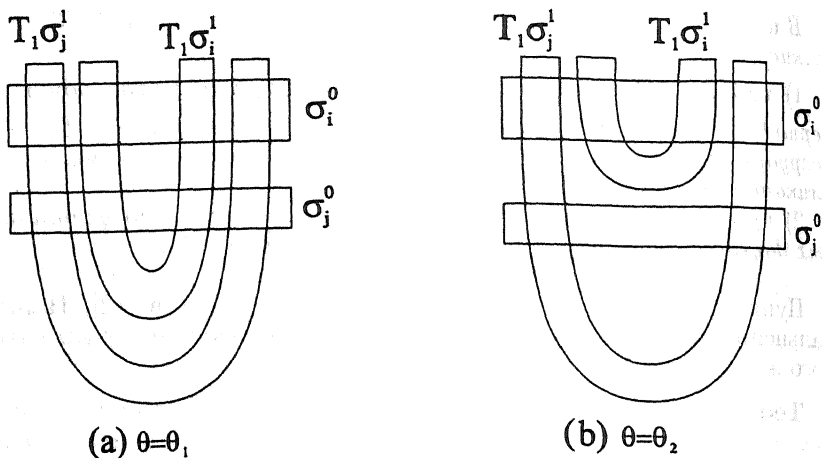


Рис. 15.

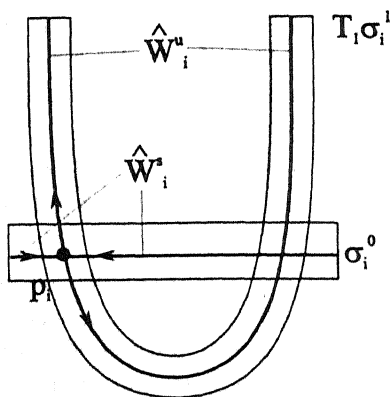


Рис. 16.

Обозначим через  $\hat{W}_i^s$  связную компоненту множества  $W^s(p_i) \cap \sigma_i^0$ , содержащую точку  $p_i$ . Покажем, что для любого достаточно большого  $i$  кривая  $\hat{W}_i^s$  имеет вид отрезка, пересекающего горизонтально полосу  $\sigma_i^0$  (и асимптотически близкого к прямой  $y = \gamma^{-i} y^-$ ) (рис. 16). Обозначим также через  $\hat{W}_i^u$  связную компоненту множества  $W^u(p_i) \cap (T_1(\sigma_i^1))$ , содержащую точку  $p_i$ . Как мы покажем,  $\hat{W}_i^u$  имеет вид отрезка параболы (с уравнением типа  $y = cx^+ \lambda^i + db^{-2}(x - x^+)^2 + \dots$ ), пересекающего подкову  $T_1(\sigma_i^1)$  по всей ее длине (рис. 16).

При  $\nu = \nu_2$ , поскольку при  $i = i^*$  и  $j = j^*$  выполнено не-

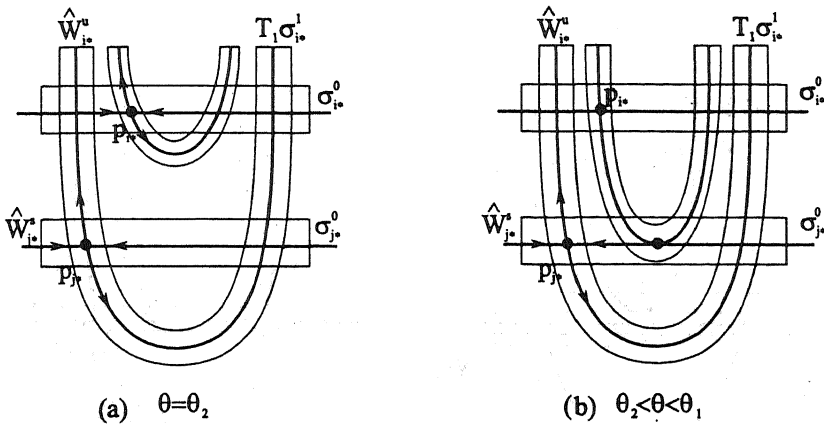


Рис. 17.

равенство (4.3), имеем  $\hat{W}_{i^*}^u \cap \hat{W}_{j^*}^s = \emptyset$ , так как подкова  $T_1(\sigma_{i^*}^1)$  и полоска  $\sigma_{j^*}^0$  не пересекаются (рис. 17(a)). С другой стороны, при  $\nu = \nu_1$  кривые  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $\hat{W}_{j^*}^s$  пересекаются ровно в двух точках, так как подкова  $T_1(\sigma_{i^*}^1)$  и полоска  $\sigma_{j^*}^0$  пересекаются правильно (при  $i = i^*$  и  $j = j^*$  и  $\theta = \theta_1$  выполнено неравенство (4.2)). Таким образом, получаем, что при непрерывном изменении значения параметра  $\nu$  найдется такое  $\nu_* \in (\nu_1, \nu_2)$ , что  $f(\nu_*)$  имеет негрубую гетероклиническую траекторию, в точках которой касаются неустойчивое многообразие точки  $p_{i^*}$  и устойчивое многообразие точки  $p_{j^*}$ . Так как пересечение подковы  $T_1(\sigma_{j^*}^1)$  с полоской  $\sigma_{i^*}^0$  всегда правильное (поскольку  $j^* > i^*$ ), то это влечет, что всегда существует грубая гетероклиническая траектория, лежащая в пересечении устойчивого многообразия точки  $p_{i^*}$  и неустойчивого многообразия точки  $p_{j^*}$  (в частности, всегда трансверсально пересекаются кривые  $\hat{W}_{j^*}^u$  и  $\hat{W}_{i^*}^s$ ). Таким образом, диффеоморфизм  $f(\nu_*)$  имеет негрубый гетероклинический контур, содержащий однообходные периодические траектории, пересекающие  $\Pi^+$  в точках  $p_{i^*}$  и  $p_{j^*}$  соответственно, и две гетероклинические траектории, одна из которых негрубая (рис. 17(b)). Этот контур является простейшим в том смысле, что имеют касание уже кривые  $\hat{W}_{i^*}^u \subset W^u(p_{i^*})$  и  $\hat{W}_{j^*}^s \subset W^s(p_{j^*})$ . Гетероклинические контура такого типа мы будем обозначать как  $C_{ij}$ .

Ясно, что сколь угодно малым (гладким) возмущением контура  $C_{i^*j^*}$  можно получить гомоклинические касания устойчивых и неустойчивых многообразий либо точки  $p_{i^*}$ , либо точки

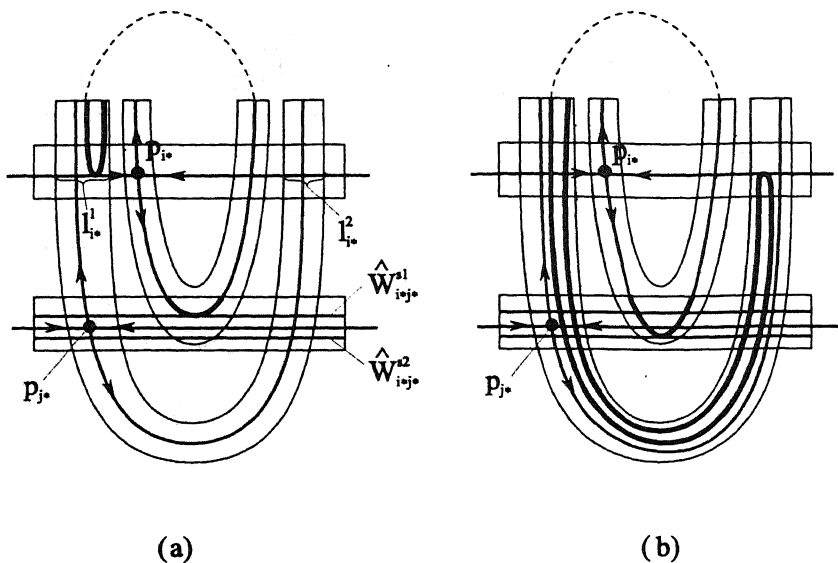


Рис. 18.

$p_{j^*}$ . Простейшее касание такого типа, которое может быть, к тому же, непосредственно вычислено (см. ниже), есть гомоклиническое касание кривой  $\hat{W}_{i^*}^u \subset W^u(p_{i^*})$  и одной из компонент связности множества  $W^s(p_{i^*}) \cap \sigma_{j^*}^0$ , которые определяются следующим образом. Так как подкова  $T_1(\sigma_{j^*}^1)$  пересекает правильно полосу  $\sigma_{j^*}^0$ , то пересечение  $T_1(\sigma_{j^*}^1) \cap \hat{W}_{i^*}^s$  состоит из двух отрезков  $l_{i^*}^1$  и  $l_{i^*}^2$  (рис. 18). Их прообразы относительно отображения  $T_0^{-j^*} T_1^{-1} : \sigma_{i^*}^0 \rightarrow \sigma_{j^*}^0$  есть горизонтальные кривые  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1}$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s2}$  на полоске  $\sigma_{j^*}^0$  (рис. 17), которые являются кусками многообразия  $W^s(p_{i^*})$ . Моменты соответствующих гомоклинических касаний изображены на рис. 18(a) и 18(b).

Для завершения доказательства теоремы, в случае  $\gamma > 0, \lambda > 0, c > 0, d > 0$ , осталось провести соответствующие вычисления (для кривых  $\hat{W}_{i^*}^s, \hat{W}_{i^*}^u, \hat{W}_{i^*j^*}^{s1}$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s2}$ ).

Заметим, что  $\theta > 1$ , поскольку  $|\lambda\gamma| < 1$ . Так как  $j^*$  и  $i^*$  достаточно велики, то из (4.3) вытекает  $j^* > i^*$ . Отсюда видно, что пары  $(i^*, i^*)$  и  $(j^*, i^*)$  всегда правильны — они удовлетворяют неравенству (3.2), в котором нужно положить  $j = i = i^*$  в первом случае и  $j = i^*$  и  $i = j^*$  — во втором.

Чтобы найти уравнения кривых  $\hat{W}_{i^*}^s$  и  $\hat{W}_{i^*}^u$ , воспользуемся представлением отображения  $\tilde{T}_i \equiv T_1 T_0^i$  на полоске  $\sigma_{i^*}^0$  в форме



(3.7) (в которой надо положить  $j = i = i^*$ ). Из этой формулы немедленно определяются координаты точки  $p_{i^*}$ :

$$x = x^+ + O(|\gamma|^{-i^*/2}), \quad y = \gamma^{-i^*} y^- + O(|\gamma|^{-3i^*/2}),$$

так как “перекрестные” координаты  $(x', y')$  и собственные координаты  $(x, y)$  на полоске  $\sigma_i^0$  связаны формулой (см. (2.2) и (2.3))

$$x = x', \quad y = \gamma^{-i} y' + \gamma^{-i} \eta_i(x', y'), \quad (4.4)$$

где  $\eta_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow +\infty$ , вместе со своими производными до порядка  $(r-1)$  (кроме, может быть,  $(r-1)$ -ой производной по параметру  $\nu$ ), и также  $\|\eta_i\|_{C^{r-2}} = O(|\gamma|^{-i})$ .

Как отмечалось в предыдущем параграфе,  $\hat{W}_i^s$  является горизонтальной кривой в координатах  $(x', y')$  (т.е. кривой вида  $y' = y^- + \varphi(x')$ , где функция  $\varphi$  определена при всех  $|x - x^+| \leq \rho_{\bar{k}}$  и  $|\varphi| \leq \rho_{\bar{k}}$ ,  $|\frac{d}{dx'} \varphi| < 1$ ; здесь  $\rho_{\bar{k}} = C|\gamma|^{-\bar{k}/2}$  — размер окрестностей  $P^\pm$ ). По определению устойчивого многообразия

$$W_i^s \subset \tilde{T}_i^{-1} W_i^s$$

и из формулы (3.7) немедленно следует, что  $\tilde{T}_i^{-1} W_i^s \cap \sigma_i^0$  задается уравнением

$$y = \gamma^{-i} y^- + O(|\gamma|^{-3i/2}), \quad (4.5)$$

т.е. в данных координатах — это кривая, отклоняющаяся от прямой  $y' = \gamma^{-i} y^-$  не больше, чем на расстояние порядка  $O(|\gamma|^{-3i/2})$ , вместе со всеми производными.<sup>1)</sup>

По свойству седловых отображений каждая из двух компонент прообраза  $\tilde{T}_{j^*}^{-1} \hat{W}_{i^*}^s \equiv T_0^{-j^*} (T_1^{-1} \hat{W}_{i^*}^s)$  также является горизонтальной кривой (в перекрестных координатах  $(x', y')$ ). Напомним, что пара  $(j^*, i^*)$  — правильная и соответственно отображение  $\tilde{T}_{j^*}$  — седловое на множестве  $\tilde{T}_{j^*}^{-1} (T_1 \sigma_{j^*}^1 \cap \sigma_{i^*}^0)$ . Эти компоненты мы обозначаем как  $\hat{W}_{i^* j^*}^{s1}$  и  $\hat{W}_{i^* j^*}^{s2}$ . Отображение  $\tilde{T}_{j^*}$  задается формулой (3.7), в которой нужно положить  $i = j^*$  и  $j = i^*$ . При этом (напомним, что  $j^* > i^*$  и, следовательно,  $|\gamma|^{-i^*} \gg |\lambda|^{j^*}$ ) прообраз кривой (4.5) под действием  $\tilde{T}_{j^*}$  также задается уравнением вида (4.5), но уже в координатах  $(x', y')$ , которые “привязаны” к полоске  $\sigma_{j^*}^0$  с помощью формулы (4.4)

<sup>1)</sup> До порядка  $(r-1)$  (кроме, может быть,  $(r-1)$ -ой производной по параметру  $\nu$ , которой может не существовать, поскольку мы приводим систему к виду (2.1) — см. подробнее в [29]).

с  $i = j^*$ . Соответственно (см. (4.5)) кривые  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1}$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s2}$  имеют вид

$$y = \gamma^{-j^*} y^- + |\gamma|^{-j^*} p_\alpha(x, \nu), \quad (4.6)$$

где  $\alpha = 1, 2$ , и (см. (2.3))

$$\|p_\alpha\|_{C^{r-2}} = O(|\gamma|^{-i^*/2}) \text{ и } \frac{d^{r-1} p_\alpha}{dx^{r-1}} \rightarrow 0 \text{ при } i^*, j^* \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Обозначим через  $W_i^u$  связную компоненту неустойчивого многообразия  $W^u(p_i) \cap \sigma_i^0$ , содержащую точку  $p_i$ . Поскольку  $p_i$  — неподвижная точка седлового отображения, то  $W_i^u$  является вертикальной кривой вида  $x' = x^+ + \psi(y')$ , где  $|\psi| \leq \rho_k$  и  $|\frac{d}{dx'} \psi| < 1$ . Так как

$$W_i^u \subset \tilde{T}_i W_i^u,$$

то из формулы (3.7) (в которой надо положить  $i = j$ ) немедленно следует, что  $W_i^u$  задается уравнением

$$x' = x^+ + O(|\gamma|^{-i/2}).$$

Теперь, по формуле (2.2) (куда надо подставить  $k = i, y_k = y' = y, x_0 = x', x_k = x$ ) образ  $T_0^i W_i^u$  в  $\sigma_i^1$  имеет вид

$$x = \lambda^i x^+ + |\lambda|^i q(y, \nu), \quad (4.8)$$

где (см. (2.3))

$$\|q\|_{C^{r-2}} = O(|\gamma|^{-i/2}) \text{ и } \frac{d^{r-1} q}{dy^{r-1}} \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow +\infty. \quad (4.9)$$

По формуле (2.5) образ  $T_1 T_0^{i^*} W_{i^*}^u$  в  $\Pi^+$  имеет вид

$$y = cx^+ \lambda^{i^*} + \frac{d}{b^2} (x - x^+)^2 + o((x - x^+)^3) + |\lambda|^{i^*} O(|x - x^+| + |\gamma|^{-i^*/2}), \quad (4.10)$$

т.е. эта кривая (мы обозначаем ее  $\hat{W}_{i^*}^u$ ) близка к центральной линии подковы  $T_1 \sigma_{i^*}^1$  (рис. 16).

Мы выбрали  $i^*$  и  $j^*$  так, что подкова  $T_1 \sigma_{i^*}^1$  не пересекает полосу  $\sigma_{j^*}^0$  при  $\nu = \nu_2$  (рис. 15(b)), но пересекает ее правильно при  $\nu = \nu_1$  (рис. 15(a)). Таким образом, кусок неустойчивого многообразия  $\hat{W}_{i^*}^u$  точки  $p_{i^*}$  не пересекает кусок  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1,2}$  устойчивого многообразия этой же точки при  $\nu = \nu_2$  и пересекает его трансверсально в двух точках при  $\nu = \nu_1$ . Следовательно, при каком-то  $\nu$  между  $\nu_1$  и  $\nu_2$  кривые  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1,2}$  должны касаться.

Из сравнения производных от правых частей (4.10) и (4.6) по  $x$  видно, что касание кривых  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $l_s^{1,2}(i^*)$  должно происходить в точке с координатой

$$x = x^+ + O(|\lambda|^{i^*} + |\gamma|^{-(j^*+i^*/2)}).$$

Разница между  $y$ -координатами соответствующих точек на кривых  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1,2}$  равна

$$D_{i^*j^*} = \gamma^{-j^*} y^- - cx^+ \lambda^{i^*} + |\gamma|^{-i^*/2} O(|\lambda|^{i^*} + |\gamma|^{-j^*}). \quad (4.11)$$

Из (4.2), (4.3) видно, что эта величина меняет знак при изменении  $\nu$  от  $\nu_1$  до  $\nu_2$ . По построению, значение  $\nu$ , при котором  $D_{i^*j^*}$  зануляется, отвечает касанию кривых  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1,2}$ , и поскольку это куски устойчивого и неустойчивого многообразий седловой периодической точки  $p_{i^*}$ , то мы имеем искомое гомоклиническое касание. Так как вторая производная от правой части (4.10) отделена от нуля и вторая производная от правой части (4.6) мала, то полученное касание квадратично. Из (4.1) следует, что при достаточно большом  $i^*$  производная  $\frac{d}{d\nu} D_{i^*j^*}$  отлична от нуля при  $D_{i^*j^*} = 0$ . Это означает, что семейство  $f_\nu$  трансверсально на  $H$  к бифуркационной поверхности систем (коразмерности один на  $H$ ), имеющим две негрубые гомоклинические траектории: одна из них  $\Gamma$ , а другая отвечает гомоклиническим касаниям, близким к построенному (т.е. касанию кусков  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1,2}$  многообразий точки, близкой  $p_{i^*}$ ).

Осталось рассмотреть случаи с отрицательными  $\lambda$  или  $\gamma$ . В случаях, отвечающих 6, 7 и 9 столбцам таблицы 1, доказательство совершенно аналогично, если брать соответствующие  $i^*, j^*$  четными. Также в этих случаях есть и негрубый контур  $C_{i^*j^*}$ .

Случаи, отвечающие 8 и 10 столбцам таблицы ( $\lambda > 0, \gamma < 0, d > 0, c < 0$  и  $\lambda < 0, \gamma < 0, d > 0, c < 0$  соответственно), несколько отличаются от рассмотренного выше: здесь  $i^*$  четное,  $j^*$  нечетное и нет неподвижной точки  $p_{j^*}$ , так как  $T_1(\sigma_{j^*}^1) \cap \sigma_{j^*}^0 = \emptyset$  (рис. 19). Таким образом, негрубого контура  $C_{i^*j^*}$  здесь нет, но гомоклинические касания кривых  $\hat{W}_{i^*}^u$  и  $\hat{W}_{i^*j^*}^{s1,2}$ , по-прежнему, есть (рис. 19) и доказательство их существования такое же, как выше.<sup>1)</sup> Это завершает доказательство теоремы.

**Замечание.** Согласно теореме 1, из трансверсальности на  $H$  семейства  $f_\nu$  и бифуркационных поверхностей, отвечающих по-

<sup>1)</sup> Отметим также, что в этих двух случаях доказательство соответствующих утверждений для  $f$  не получается автоматически переходом к  $f^2$ .

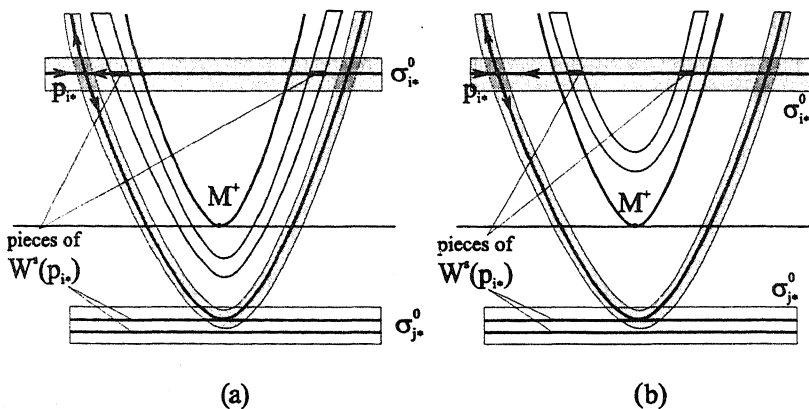


Рис. 19.

строенным гомоклиническим касаниям, следует, что в семействе  $f_\nu$  плотны значения  $\nu$ , отвечающие гомоклиническим касаниям третьего класса.

Подчеркнем еще раз, что построенные вторичные гомоклинические касания с необходимостью возникают в любом семействе систем на  $H$ , в котором  $\theta$  меняется монотонно. Величина  $\theta$  зависит только от значений мультипликаторов в точке  $O$ , поэтому новые гомоклинические касания могут быть получены малым возмущением системы, локализованным в сколь угодно малой окрестности точки  $O$ .

**Теорема 4.** *На пленке  $H$ , образованной системами с гомоклиническим касанием третьего класса, плотны системы, имеющие бесконечно много седловых периодических траекторий, каждая из которых имеет негрубую гомоклиническую траекторию третьего класса.*

**Доказательство.** Для получения новых гомоклинических касаний мы будем использовать малые возмущения, не выводящие из  $H$  и локализованные в сколь угодно малой окрестности точки  $O$ . Эти возмущения будут найдены конструктивно.

Именно, возьмем произвольное  $\delta > 0$  и пусть  $\delta_m$  — последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \delta. \quad (4.12)$$

Для произвольной системы  $f_0$  на  $H$  построим систему  $f^*$ ,  $\delta$ -близкую к  $f_0$  в  $C^r$ -топологии и имеющую бесконечно много гомоклинических касаний. Будем возмущать  $f_0$  локально, в малой окрестности точки  $O$ , поэтому глобальное отображение  $T_1$  не меняется, и мы будем следить только за отображением  $T_0$ .

Мы не будем здесь приводить отображение  $T_0$  к виду (2.1), чтобы не терять гладкости. Вместо этого распрямим локальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $O$  (это может быть сделано  $C^r$ -гладкой заменой координат), так что отображение  $T_0$  примет вид

$$\bar{x} = \lambda x + h(x, y), \quad \bar{y} = \gamma y + g(x, y), \quad (4.13)$$

где  $h(0, y) = 0$  и  $g(x, 0) = 0$ . Выберем  $f^*$  так, чтобы отображение  $T_0$  приняло вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x + h(x, y), \\ \bar{y} &= \left( \gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m \delta_m \chi(\kappa_m^{-1} \cdot (x, y)) \right) y + g(x, y), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где положительные величины  $\kappa_m$  и  $\nu_m$  подлежат определению. Во всяком случае, мы будем требовать, чтобы ряд в (4.14) сошелся; а  $\chi(\cdot)$  —  $C^\infty$ -гладкая функция на плоскости, положительная в единичном круге и тождественно равная нулю вне его, при этом  $\|\chi\|_{C^r} \leq 1$  (существование таких функций — стандартный факт). Выберем  $\kappa_m$  достаточно малыми и  $\nu_m \in [0, \kappa_m^r]$ , так что данное возмущение будет локализовано в малой окрестности точки  $O$ , и его  $C^r$ -норма будет меньше заданного  $\delta$ . Конкретно, возмущение локализовано в окрестности размера  $\sup_{m \geq 1} \kappa_m$ . Кроме того, за счет (4.12) и выбора малых  $\nu_m$  мы добиваемся и равномерной  $C^r$ -сходимости ряда в (4.14). Так как мы не хотим менять отображение  $T_1$ , действующее из малой окрестности гомоклинической точки  $M^-$  в малую окрестность гомоклинической точки  $M^+$ , то должны потребовать

$$\sup_{m \geq 1} \kappa_m < d_0 \equiv \min(x^+, y^-). \quad (4.15)$$

Позиция локальных устойчивого и неустойчивого многообразий точки  $O$  не изменяется при данном возмущении (они остаются прямыми), поэтому исходное гомоклиническое касание  $T_1(W_{\text{loc}}^u \cap \Pi^+)$  с  $W_{\text{loc}}^u$  не исчезает (напомним, что отображение  $T_1$  не изменяется).

Система  $f^*$  служит пределом для последовательности систем  $f_M$  с одним и тем же отображением  $T_1$  и с отображением  $T_0$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x + h(x, y), \\ \bar{y} &= \left( \gamma + \sum_{m=1}^M \nu_m \delta_m \chi(\kappa_m^{-1} \cdot (x, y)) \right) y + g(x, y). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Выберем величины  $\nu_m$  и  $\kappa_m$  последовательно, так чтобы для каждого  $M \geq 1$  система  $f_M$  имела  $M$  седловых периодических траекторий с гомоклиническими касаниями третьего класса (в дополнение к  $L_0$  и  $\Gamma_0$ ). Эти траектории отделены от точки  $O$ ,

поэтому любое возмущение системы, локализованное в некоторой малой окрестности точки  $O$ , не расщепляет эти касания. Обозначим размер этой окрестности через  $d_M$  и потребуем, чтобы

$$\sup_{m>M} \kappa_m < d_M. \quad (4.17)$$

Это означает, что разница между  $f_M$  и всеми последующими системами  $f_{M+1}, f_{M+2}, \dots$ , включая  $f^*$ , локализована в окрестности точки  $O$  размера  $d_M$ . Следовательно,  $M$  гомоклинических касаний в системе  $f_M$  не исчезают при переходе к последующим системам  $f_{M+1}, f_{M+2}, \dots$ . Таким образом, предельная система  $f^*$  будет иметь бесконечно много гомоклинических касаний, что и требовалось.

Условия (4.15) и (4.17) дают индуктивное правило для определения подходящих величин  $\kappa_m$  (масштабы, на которых локализованы наши последовательные возмущения). Чтобы определить величины  $\nu_m$  (размеры возмущений), будем действовать по индукции. Предположим, что для некоторого  $M \geq 1$  все величины  $\nu_m, \kappa_m$  с  $m \leq M - 1$  уже определены. Выберем  $\kappa_M < \min(d_0, \dots, d_{M-1})$  (т.е. так, чтобы удовлетворялись (4.15) и (4.17)) и рассмотрим однопараметрическое семейство систем  $f(\nu)$ , отличающихся от  $f_{M-1}$  только в окрестности точки  $O$  размера  $\kappa_M$ , такое что отображение  $T_0$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x + h(x, y), \\ \bar{y} &= (\gamma + \sum_{m < M} \nu_m \delta_m \chi(\kappa_m^{-1} \cdot (x, y)) + \\ &+ \nu \delta_M \chi(\kappa_M^{-1} \cdot (x, y))) y + g(x, y); \end{aligned} \quad (4.18)$$

здесь  $\nu$  меняется от 0 до  $\kappa_M^r$  (где  $r$  — гладкость системы).

При  $\nu = 0$  эта система совпадает с системой  $f_{M-1}$ , которая имеет  $M-1$  вторичных гомоклинических касаний третьего класса по предположению индукции. Так как разница между этой системой и  $f_{M-1}$  при всех  $\nu$  локализована в окрестности точки  $O$  достаточно малого размера  $\kappa_M$ , то эти гомоклинические касания сохраняются при всех  $\nu$  и лежат на конечном расстоянии от  $O$ . При этом значения величины  $\theta$  непрерывно меняются при изменении  $\nu$ :

$$\theta = - \frac{\ln \lambda}{\ln(\gamma + (\nu \delta_M + \sum_{m < M} \nu_m \delta_m) \chi(0))}.$$

На основании теоремы 3 получаем, что сколь угодно близко к  $\nu = 0$  имеются значения  $\nu$ , при которых система имеет еще одно гомоклиническое касание третьего класса в произвольной близости от исходной гомоклинической траектории  $\Gamma_0$ . Выбирая такое достаточно малое  $\nu$  в качестве искомого  $\nu_M$ , получаем систему  $f_M$ , имеющую уже  $M$  вторичных гомоклинических

касаний третьего класса. Продолжая это построение до бесконечности, мы получаем требуемую систему  $f^*$ , которая лежит в  $H$  и является  $C^r$ -гладкой по построению. Теорема доказана.

## § 5. Гомоклинические касания произвольно высокого порядка

В данном параграфе мы показываем, что малым возмущением бесконечной цепочки сосуществующих гомоклинических касаний, построенной в теореме 4, можно получить гомоклинические касания произвольно высоких порядков. Именно, имеет место следующий результат.

**Теорема 5.** *Системы с гомоклиническими касаниями любого порядка плотны в множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса.*

**Доказательство.** Мы покажем, что для любой системы  $f_0 \in C^r$  с квадратичным гомоклиническим касанием третьего класса, для любого  $\delta > 0$  и любого  $n$  найдется не расщепляющее исходное касание возмущение с  $C^r$ -нормой, не больше  $\delta$ , такое, что возмущенная система будет иметь траекторию гомоклинического касания порядка  $n$ . Удобно с самого начала предполагать, что  $f_0 \in C^\infty$  (поскольку мы можем всегда повысить гладкость  $f_0$  сколь угодно малым  $C^r$ -возмущением, не расщепляя исходного гомоклинического касания).

Согласно теореме 4, в любой окрестности  $f_0$  в  $C^r$ -топологии на бифуркационной пленке  $H$  имеется система  $f^*$  такая, что для некоторой бесконечной последовательности индексов  $i_1 < i_2 < \dots$  седловые неподвижные точки  $p_{i_m} \in \sigma_{i_m}^0$  отображения  $\bar{T}_{i_m}$  для системы  $f^*$  имеют каждая негрубую гомоклиническую траекторию квадратичного касания. При этом если  $\gamma < 0$  или  $\lambda < 0$ , то все  $i_m$  четные (см. доказательство теоремы 3).

Заметим, что, поскольку  $|\lambda\gamma| < 1$ , из леммы 1 вытекает, что для любого достаточно большого  $i$  подкова  $T_1\sigma_i^1$  пересекается с полоской  $\sigma_{i+1}^0$  правильно, если  $\gamma > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Если  $\gamma$  или  $\lambda$  отрицательны, то во всяком случае для четных  $i$  подкова  $T_1\sigma_i^1$  пересекает правильно полоску  $\sigma_{i+2}^0$ . В любом случае для любого  $m$  существует конечная возрастающая последовательность индексов  $i_m \equiv i_{m0}, i_{m1}, \dots, i_{ml} \equiv i_{m+1}$  такая, что последовательность  $(\dots, i_m, i_m, i_{m1}, \dots, i_{ml-1}, i_{m+1}, i_{m+1}, \dots)$  (асимптотическая к периодическим с обеих сторон) правильна.

Это означает, что мы имеем следующую картину (рис. 20(а)): неустойчивое многообразие  $W^u(p_{i_m})$  трансверсально пересекает устойчивое многообразие  $W^s(p_{i_{m1}})$ , неустойчивое многообразие  $W^u(p_{i_{m1}})$  трансверсально пересекает устойчивое многообразие  $W^s(p_{i_{m2}}), \dots$ , неустойчивое многообразие  $W^u(p_{i_{ml-1}})$  транс-

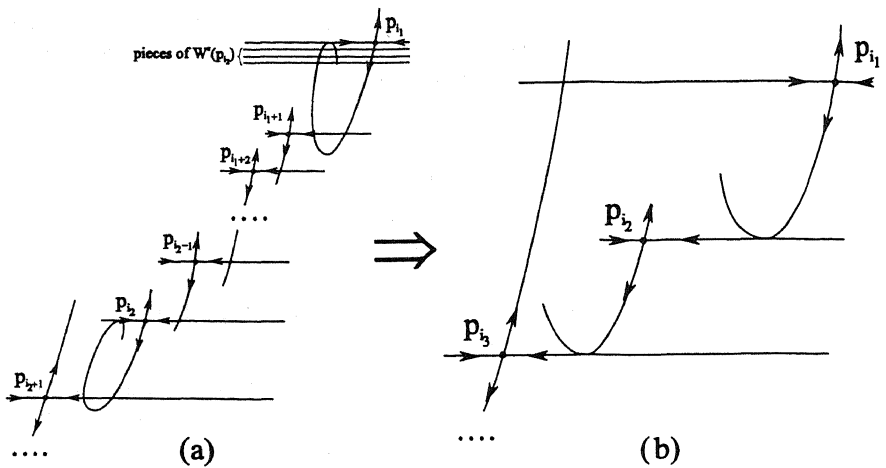


Рис. 20.

версально пересекает устойчивое многообразие  $W^s(p_{i_{m+1}})$  и так для любого  $m$ . По теореме 2 для любого  $m$  существует траектория (с кодировкой

$$(\dots i_m, i_m, i_{m1}, \dots, i_{m1-1}, i_{m+1}, i_{m+1} \dots))$$

трансверсального пересечения многообразий  $W^u(p_{i_m})$  и  $W^s(p_{i_{m+1}})$ .

Отсюда в силу  $\lambda$ -леммы следует, что к устойчивому многообразию  $W^s(p_{i_m})$  накапливаются куски устойчивого многообразия  $W^s(p_{i_{m+1}})$ . Поэтому сколь угодно малым  $C^r$ -гладким возмущением системы, локализованным в сколь угодно малой окрестности точки  $p_{i_m}$ , квадратичное гомоклиническое касание многообразий  $W^u(p_{i_m})$  и  $W^s(p_{i_m})$  можно расщепить таким образом, чтобы вблизи него образовалось квадратичное гетероклиническое касание многообразий  $W^u(p_{i_m})$  и  $W^s(p_{i_{m+1}})$ .<sup>1)</sup> Поскольку эти новые возмущения локализованы в сколь угодно малых окрестностях точек  $p_{i_m}$ , то каждое из них не расщепляет другие гомоклинические или гетероклинические касания. Таким образом, мы можем последовательно модифицировать отображение  $f^*$  так, чтобы полученная в пределе система была по-прежнему  $C^r$ -близка к  $f_0$  и при этом  $W^u(p_{i_1})$  касалась квадратично  $W^s(p_{i_2})$  по некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{i_1 i_2}$ , ...,  $W^u(p_{i_m})$  касалась квадратично  $W^s(p_{i_{m+1}})$  по некоторой гетеро-

<sup>1)</sup>Для всех типов квадратичных гомоклинических касаний третьего класса, кроме случаев 8 и 10 таблицы 1, здесь можно рассматривать непосредственно негрубый гетероклинический контур типа  $C_{i_m j_{m+1}}$  (см. предыдущий параграф).



клинической траектории  $\Gamma_{i_m i_{m+1}}$ , и так далее до бесконечности (рис. 20(b)).

Заметим, что так как  $|\lambda\gamma| < 1$  и  $i_m > i_1$  при  $m > 1$  (и, кроме того, все  $i_m$  четные при отрицательных  $\gamma$  или  $\lambda$ ), то пара  $(i_m, i_1)$  всегда правильная, т.е. по теореме 2 всегда существует траектория трансверсального пересечения  $W^u(p_{i_m})$  и  $W^s(p_{i_1})$ .

Теперь утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

**Лемма 2.** Пусть  $L_1, L_2, L_3$  — седловые периодические траектории некоторой  $C^\infty$ -гладкой системы  $g$ . Пусть  $W^u(L_1)$  и  $W^s(L_2)$  имеют касание порядка  $n-1$  по некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{12}$ , а  $W^u(L_2)$  и  $W^s(L_3)$  имеют квадратичное касание по некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{23}$ . Тогда существует сколь угодно малое (в  $C^r$ -топологии, для произвольного  $r$ ) возмущение, локализованное в сколь угодно малой окрестности некоторых гетероклинических точек траекторий  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{23}$ , такое что у нового диффеоморфизма  $\tilde{g}$  многообразия  $W^u(L_1)$  и  $W^s(L_3)$  будут иметь касание порядка  $n$  в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{13}$ .

Именно, применяя лемму 2 к контуру  $p_{i_1}, \Gamma_{i_1 i_2}, p_{i_2}, \Gamma_{i_2 i_3}, p_{i_3}$  (рис. 20(b)), из цепочки гетероклинических касаний, построенных выше, получаем, что малым возмущением, локализованным в окрестностях траекторий  $\Gamma_{i_1 i_2}$  и  $\Gamma_{i_2 i_3}$ , можно построить гетероклиническую траекторию  $\Gamma_{i_1 i_3}$ , отвечающую касанию порядка 2 (т.е. кубическому) между многообразиями  $W^u(p_{i_1})$  и  $W^s(p_{i_3})$ . Остальные гетероклинические касания не расщепляются при таком возмущении и, применяя лемму теперь к контуру  $p_{i_1}, \Gamma_{i_1 i_3}, p_{i_3}, \Gamma_{i_3 i_4}, p_{i_4}$ , мы получаем гетероклиническую траекторию  $\Gamma_{i_1 i_4}$ , отвечающую касанию порядка 3 между многообразиями  $W^u(p_{i_1})$  и  $W^s(p_{i_4})$ , и так далее, пока не получим гетероклиническое касание порядка  $n$  между многообразиями  $W^u(p_{i_1})$  и  $W^s(p_{i_{n+1}})$ . Так как  $W^u(p_{i_{n+1}})$  всегда имеет траекторию трансверсального пересечения с  $W^s(p_{i_1})$ , то в силу  $\lambda$ -леммы к устойчивому многообразию  $W^s(p_{i_{n+1}})$  накапливаются куски устойчивого многообразия  $W^s(p_{i_1})$ . Следовательно, еще одним произвольно малым возмущением можно расщепить гетероклиническое касание порядка  $n$  между многообразиями  $W^u(p_{i_1})$  и  $W^s(p_{i_{n+1}})$  так, чтобы получить требуемое гомоклиническое касание порядка  $n$  (между многообразиями  $W^u(p_{i_1})$  и  $W^s(p_{i_1})$ ).

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать лемму 2.

Пусть  $O_2$  — точка на периодической траектории  $L_2$  и пусть соответствующее локальное отображение  $T_0$  приведено к виду

(см. (2.1))

$$\bar{x} = \lambda_2 x + h_2(x, y)x^2y, \quad \bar{y} = \gamma_2 y + g_2(x, y)xy^2, \quad (5.1)$$

где  $\lambda_2$  и  $\gamma_2$  — мультипликаторы  $L_2$  такие, что  $0 < |\lambda_2| < 1 < |\gamma_2|$ . Таким образом, точка  $O_2$  совпадает с началом координат,  $W_{loc}^s(O_2)$ , имеет уравнение  $y = 0$ , а  $W_{loc}^u(O_2)$  — уравнение  $x = 0$ . Выберем вблизи  $O_2$  две гетероклинические точки:  $M_2^+(x_2^+, 0)$ , принадлежащую траектории  $\Gamma_{12}$ , и  $M_2^-(0, y_2^-)$ , принадлежащую траектории  $\Gamma_{23}$  (рис. 21).

Поскольку  $\Gamma_{12}$  отвечает касанию порядка  $(n-1)$ , то уравнение отрезка  $l_u$  неустойчивого многообразия траектории  $L_1$  вблизи точки  $M_2^+$  имеет вид

$$y = d_1(x - x_2^+)^n + o[(x - x_2^+)^n].$$

В свою очередь, уравнение отрезка  $l_s$  устойчивого многообразия траектории  $L_3$  вблизи точки  $M_2^-$  можно записать в виде

$$x = d_2(y - y_2^-)^2 + o[(y - y_2^-)^2].$$

Ненулевые коэффициенты  $d_1$  и  $d_2$  в этих формулах можно всегда сделать равными единице линейной заменой координат, и ниже мы будем предполагать, что это выполнено.

Возмутим систему  $g$  так, что уравнение кривой  $l_u$  примет вид

$$y = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x - x_2^+) + \dots + \varepsilon_{n-2}(x - x_2^+)^{n-2} + \varepsilon_{n-1}(x - x_2^+)^{n-1} + (x - x_2^+)^n + o[(x - x_2^+)^n], \quad (5.2)$$

а уравнение кривой  $l_s$  — вид

$$x = \mu_0 + \mu_1(y - y_2^-) + (y - y_2^-)^2 + o[(y - y_2^-)^2]. \quad (5.3)$$

Здесь  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}$  и  $\mu_0, \mu_1$  — независимые малые параметры, которые подлежат определению. Очевидно, что соответствующее возмущение можно локализовать в окрестности двух гетероклинических точек (одной на траектории  $\Gamma_{12}$  и одной на траектории  $\Gamma_{23}$ ).

Покажем, что для достаточно большого  $k$  параметры  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$  и  $\mu_0, \mu_1$  можно выбрать так, что кривые  $T_0^{-k}l_s$  и  $l_u$  (рис. 22) имеют касание порядка  $n$  вблизи точки  $M_2^+$ , причем при  $k \rightarrow +\infty$  соответствующие значения параметров  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$  и  $\mu_0, \mu_1$  стремятся к нулю. Для определенности, в случае  $\lambda_2 < 0$  возьмем  $k$  четным, так что всегда  $\lambda_2^k > 0$ .

Согласно (2.2), кривая  $T_0^{-k}l_s$  имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_2^k x + \lambda_2^k \xi_k(x, \bar{y}) &= \mu_0 + \mu_1(\bar{y} - y_2^-) + (\bar{y} - y_2^-)^2 + o[(\bar{y} - y_2^-)^2], \\ y &= \gamma_2^{-k} \bar{y} + \gamma_2^{-k} \eta_k(x, \bar{y}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $\tilde{y}$  — параметр, пробегающий значения вблизи  $\tilde{y} = y_2^-$ ; функции  $\xi_k$  и  $\eta_k$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  вместе со всеми производными.

Введем новые переменные  $u = x - x_2^+$ ,  $w = \tilde{y} - y_2^-$ . Тогда уравнения кривых (5.2) и (5.4) записываются в виде

$$y = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 u + \dots + \varepsilon_{n-1} u^{n-1} + u^n + o(u^n) \quad (5.5)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_2^k u + \lambda_2^k \tilde{\xi}_k(u, w) &= \tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}_1 w + w^2 + o(w^2), \\ y - \gamma_2^{-k} y_2^- &= \gamma_2^{-k} w + \gamma_2^{-k} \eta_k(u + x_2^+, w + y_2^-), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $\tilde{\mu}_0 = \mu_0 - \lambda_2^k(x_2^+ + \xi_k(x_2^+, y_2^-))$ ,  $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 - \lambda_2^k \frac{d}{dy} \xi_k(x_2^+, y_2^-)$  и функция  $\tilde{\xi}_k$  тождественно зануляется при  $u = 0$  (мы просто перенесли  $\lambda_2^k \xi_k(x_2^+, y_2^- + w)$  в правую часть уравнения).

Сделаем теперь замену переменной  $y - \gamma_2^{-k} y_2^- - \gamma_2^{-k} \eta_k(u + x_2^+, y_2^-) = v$ , после которой второе уравнение в (5.6) примет вид

$$v = \gamma_2^{-k} w + \gamma_2^{-k} \tilde{\eta}_k(u, w), \quad (5.7)$$

где  $\tilde{\eta}_k(u, w)$  тождественно зануляется при  $w = 0$ . Уравнение (5.5) кривой  $l_u$  переписывается в виде

$$v = \tilde{\varepsilon}_0 + \tilde{\varepsilon}_1 u + \dots + \tilde{\varepsilon}_{n-1} u^{n-1} + u^n + o(u^n), \quad (5.8)$$

где модифицированные параметры  $\tilde{\varepsilon}_j$  отличаются от исходных параметров  $\varepsilon_j$  на величины, стремящиеся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ .

Зафиксируем выбор  $\mu_1$  и  $\varepsilon_{n-1}$ , потребовав, чтобы  $\tilde{\mu}_1 = 0$  и  $\tilde{\varepsilon}_{n-1} = 0$ . Также отнормируем координаты следующим образом: заменим в формулах (5.6)–(5.8)

$$u \mapsto \alpha_k u, \quad v \mapsto \alpha_k^n v, \quad w \mapsto w \sqrt{-\lambda_2^k \alpha_k}, \quad (5.9)$$

где малый сомножитель  $\alpha$  дается формулой

$$\alpha_k^{2n-1} = -\lambda^k \gamma^{-2k}. \quad (5.10)$$

В новых координатах уравнение (5.6), (5.7) для кривой  $T_0^{-k} l_s$  переписывается как

$$u = \Delta - v^2 + p_{k1}(v), \quad v = w + p_{k2}(w),$$

где функции  $p_{k1}, p_{k2}$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  вместе со своими производными, так что это уравнение может быть переписано в явном виде

$$u = \Delta - v^2 + p_k(v), \quad (5.11)$$

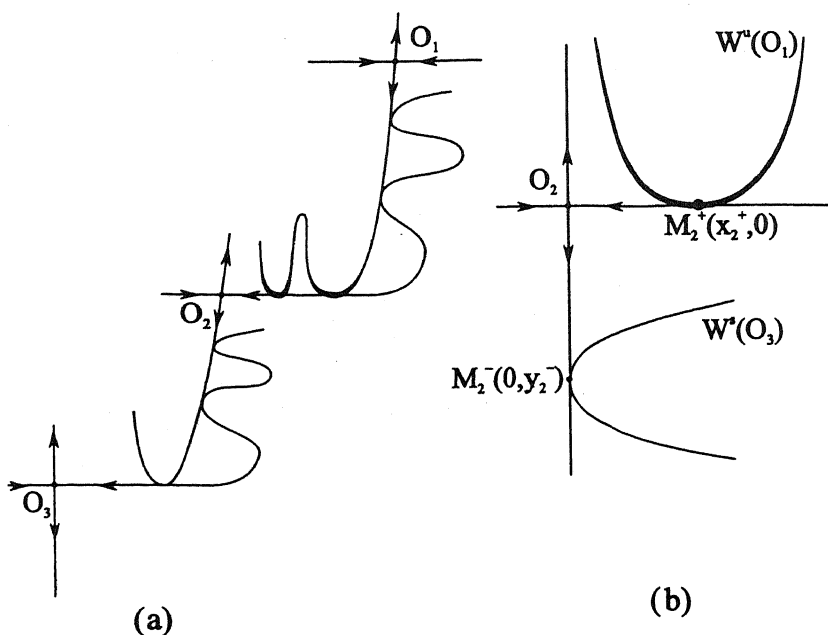


Рис. 21.

где  $p_k$  стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  вместе со своими производными;  $\Delta$  — это отмасштабированный параметр  $\tilde{\mu}_0$ :

$$\Delta = \frac{\tilde{\mu}_0}{\alpha_k \lambda^k}. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.5) кривой  $l_u$  примет вид

$$v = E_0 + E_1 u + \dots + E_{n-2} u^{n-2} + u^n + q_k(u), \quad (5.13)$$

где  $q_k$  стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  вместе со своими производными и

$$E_j = \frac{\tilde{\epsilon}_j}{\alpha_k^{n-j}}, \quad j = 0, \dots, n-2. \quad (5.14)$$

Мы покажем, что при любом достаточно большом  $k$  кривые (5.11) и (5.13) имеют касание порядка  $n$  в ограниченной области значений  $u$  и  $v$  при ограниченных значениях параметров  $\Delta, E_0, \dots, E_{n-2}$ . Возвращаясь к неотмасштабированным переменным  $u, v$  (формула (5.9)) и параметрам  $\tilde{\mu}_0, \tilde{\epsilon}_j$  (см. (5.12), (5.14)), получаем, что касание  $n$ -го порядка между кривыми  $T_0^{-k} l_s$  и  $l_u$  имеет место при малых (стремящихся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ ) значениях  $u, v, \tilde{\mu}, \tilde{\epsilon}$ , т.е. в малой окрестности точки

$M_2^+$  и при малых значениях параметров возмущения  $\mu, \varepsilon$ , что и требовалось.

Таким образом, задача свелась к вопросу о касании кривых (5.11) и (5.13). По существу, в основе нашего рассмотрения лежит следующая сравнительно несложная алгебраическая задача:

*Пусть на плоскости  $(u, v)$  даны две параболы*

$$u = \Delta - v^2 \text{ и } v = \sum_{j=0}^{n-2} E_j u^j + u^n, \quad (5.15)$$

*одна второй степени, а другая —  $n$ -ой. Требуется доказать, что существуют такие значения параметров, при которых параболы имеют касание  $n$ -го порядка.*

Формально мы, тем не менее, не будем сводить задачу к вопросу о касании полиномиальных кривых (5.15), а будем непосредственно учитывать малые добавки  $p_k$  и  $q_k$  в (5.11) и (5.13). Заметим, что мы решали подобную задачу в [20], но для полноты изложения проведем подробное рассмотрение также и здесь.

Обозначим

$$Q(u) = \sum_{j=0}^{n-2} E_j u^j + u^n. \quad (5.16)$$

Условие касания  $n$ -го порядка кривых (5.11) и (5.13) в некоторой точке  $(u^*, v^*)$  записывается в виде

$$\begin{aligned} u^* &= \Delta - Q^2(u^*) + \dots, \\ 1 &= -2Q(u^*)Q'(u^*) + \dots, \\ 0 &= -Q(u^*)Q''(u^*) - (Q'(u^*))^2 + \dots, \\ &\dots \\ 0 &= -\sum_{i=0}^{j-1} C_{j-1}^i Q^{(i)}(u^*)Q^{(j-i)}(u^*) \dots, \\ 0 &= -\frac{d^n Q^2}{du^n}(u^*) + \dots, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где  $C_{j-1}^i$  — биномиальные коэффициенты, а многоточия (здесь и ниже) обозначают члены, стремящиеся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  вместе со своими производными. Из (5.17) немедленно следует,

что  $Q(u^*)$  должно быть отлично от нуля, и

$$\begin{aligned} Q'(u^*) &= -\frac{1}{2}Q^{-1}(u^*) + \dots, \\ Q''(u^*) &= -\frac{1}{4}Q^{-3}(u^*) + \dots, \\ &\dots \\ Q^{(j)}(u^*) &= -\sigma_j Q(u^*)^{-(2j-1)} + \dots, \\ &\dots \\ Q^{(n)}(u^*) &= -\sigma_n Q(u^*)^{-(2n-1)} + \dots, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где  $\sigma_j$  — некоторые константы,  $\sigma_1 = 1/2$ ,  $\sigma_2 = 1/4$  и

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{j-1} C_{j-1}^i \sigma_i \sigma_{j-i}.$$

Из этой формулы видно, что все  $\sigma_j$  положительны; для нас важно, что  $\sigma_n \neq 0$ .<sup>1)</sup>

Так как  $Q(u)$  — многочлен, то имеем

$$Q(u) = Q(u^*) + Q'(u^*)(u - u^*) + \dots + \frac{Q^{(n)}(u^*)}{n!}(u - u^*)^n. \quad (5.19)$$

Так как у полинома  $Q$  коэффициент перед  $u^n$  должен быть равен 1, а коэффициент перед  $u^{n-1}$  должен быть равен 0, то из (5.19) вытекает, что

$$Q^{(n)}(u^*) = n! \quad (5.20)$$

$$Q^{(n-1)}(u^*) = u^* Q^{(n)}(u^*). \quad (5.21)$$

Из последнего уравнения в (5.18) и первого уравнения в (5.21) находим

$$Q(u^*) = -\left(\frac{\sigma_n}{n!}\right)^{1/(2n-1)} + \dots,$$

и так как  $\sigma_n \neq 0$ , то получаем, что  $Q(u^*)$  отделено от нуля при  $k \rightarrow +\infty$ . Теперь из (5.18) находятся значения всех остальных

<sup>1)</sup> Коэффициенты  $\sigma_j$  можно вычислить в явном виде: заметим, что для функции  $\hat{Q}(u) = \sqrt{\Delta - u}$  соотношения (5.17) выполнены тождественно при любом  $u^*$ , поэтому  $\hat{Q}^{(j)}(u) \equiv -\sigma_j \hat{Q}^{-(2j-1)}(u)$  при любом  $u$  (см. (5.18)). Дифференцируя это тождество, имеем

$$\hat{Q}^{(j+1)}(u) = \sigma_j (2j-1) \hat{Q}^{-(2j)}(u) Q'(u) = -\sigma_j ((2j-1)/2) \hat{Q}^{-(2j+1)},$$

откуда  $\sigma_{j+1} = \frac{2j-1}{2} \sigma_j$  и

$$\sigma_j = \frac{(2j-3) \cdot (2j-5) \dots 3 \cdot 1}{2^j}.$$

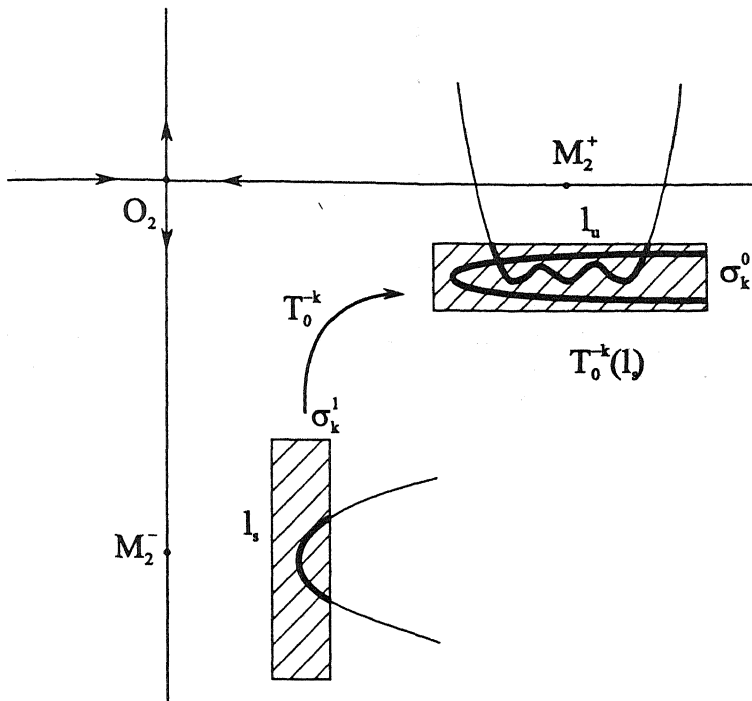


Рис. 22.

производных  $Q^{(j)}(u^*)$ , а из предпоследнего уравнения в (5.18) и из (5.21) вычисляется координата  $u^*$ :

$$u^* = \frac{2}{2n-1} \left( \frac{\sigma_n}{n!} \right)^{2/(2n-1)} + \dots$$

Из первого уравнения в (5.17) находится коэффициент  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{2n+1}{2n-1} \left( \frac{\sigma_n}{n!} \right)^{2/(2n-1)} + \dots,$$

а коэффициенты  $E_j$  определяются из (5.19). (Например, в случае  $n=2$ , имеем:  $\Delta = 3/4 + \dots$ ,  $E_0 = -3/4 + \dots$ ,  $u^* = 1/2 + \dots$ . Соответственно получаем, что параболы  $u = 3/4 - v^2$  и  $v = -3/4 + u^2$  имеют кубическое касание в точке  $v = -1/2$ ,  $u = 1/2$  (рис. 23).)

Так как полученные значения  $E_j$ ,  $\Delta$ ,  $u^*$  и  $v^* = Q(u^*) + \dots$  имеют конечные пределы при  $k \rightarrow +\infty$ , то они остаются ограниченными при всех достаточно больших  $k$ , что и требовалось. Лемма доказана.

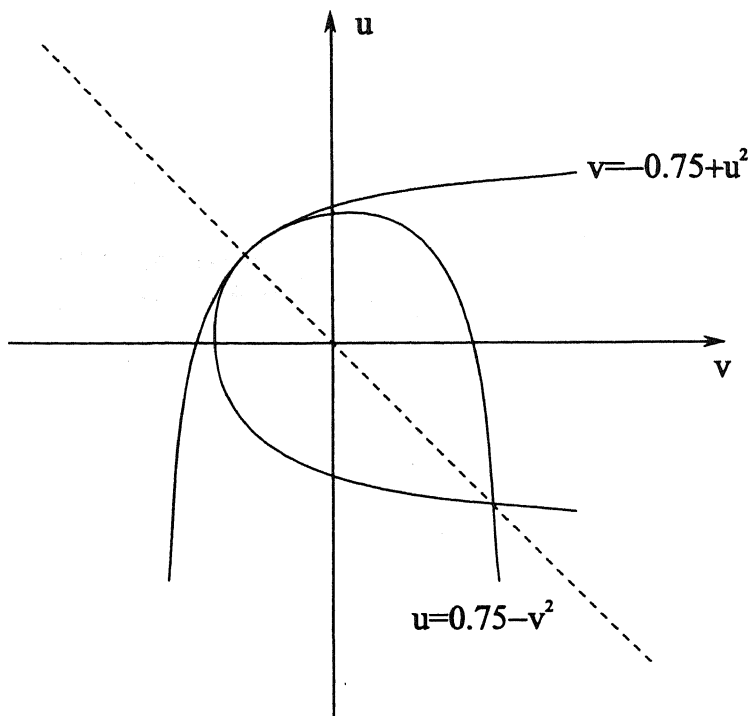


Рис. 23.

Заметим, что если для некоторой седловой периодической траектории ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют гомоклиническое касание порядка  $\geq r$ , то малым шевелением системы в  $C^r$ -топологии всегда можно добиться, чтобы устойчивое и неустойчивое многообразия совпадали на некотором интервале, т.е. получить континуум (однопараметрическое семейство) негрубых гомоклинических траекторий (назовем такие семейства *гомоклиническими лентами*). Таким образом, из теоремы 5 следует

**Утверждение 1.** *В множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса плотны системы с гомоклиническими лентами.*

Заметим также, что по теореме 4 мы можем сначала возмутить исходную систему третьего класса так, чтобы она имела счетное множество касаний третьего класса, а потом применить конструкцию теоремы 5 вблизи каждого из этих касаний — мы можем делать это независимо, поскольку возмущение, построенное в теореме 5, локализовано в малой окрестности отдельно взятой гомоклинической траектории. Таким образом, мы можем



формально усилить теорему 5 следующим образом:

**Утверждение 2.** В множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса плотны системы, каждая из которых имеет бесконечно много гомоклинических касаний каждого порядка  $n = 1, \dots, \infty$ , включая бесконечно много отдельных гомоклинических лент.

## § 6. Периодические траектории высоких порядков вырождения

В этом параграфе мы, в частности, будем иметь дело с вырожденными периодическими траекториями. Будем придерживаться следующего определения.

**Определение 1.** Пусть некоторая  $C^r$ -гладкая система  $g$  имеет периодическую траекторию  $L$ , у которой один из мультипликаторов  $\nu$  равен  $\pm 1$ , а второй мультипликатор отличен от единицы по модулю. При этом ограничение отображения первого возвращения (отображения Пуанкаре) вблизи  $L$  на одномерное центральное многообразие записывается либо в следующем виде:

$$\bar{y} = y + l_n y^n + \dots, \text{ если } \nu = 1,$$

$$\bar{y} = -y - l_n y^{2n+1} + \dots, \text{ если } \nu = -1,$$

(где  $l_n \neq 0$  —  $n$ -я ляпуновская величина;  $1 \leq n \leq r-1$  при  $\nu = 1$  и  $1 \leq n \leq (r-1)/2$  при  $\nu = -1$ ), либо, если все ляпуновские величины равны нулю, в следующем виде:

$$\bar{y} = \nu y + o(y^r).$$

В первом случае будем говорить, что периодическая траектория имеет порядок вырождения  $n-1$ , а в последнем, что периодическая траектория имеет бесконечный (неопределенный) порядок вырождения.

**Теорема 6.** Системы с периодическими траекториями любого порядка вырождения (как с  $\nu = 1$ , так и с  $\nu = -1$ ) плотны в множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса.

**Замечание.** Отметим, что, как это вытекает из теоремы 2, однообходные периодические траектории вблизи негрубой гомоклинической траектории всегда являются грубыми седловыми (пока мы не расщепляем касание). Двухобходные же могут быть негрубыми, при этом они имеют порядок вырождения единица и могут быть как с мультипликатором  $+1$ , так и  $-1$  [12], [23]. В случае трехобходных периодических траекторий могут встречаться вырождения более высоких порядков. Так, в [15] показано, что в множестве систем с гомоклиническими касаниями

третьего класса плотны системы, имеющие негрубые трехобходные периодические траектории порядка вырождения два. Такие периодические траектории неустранимым образом встречаются в двухпараметрических семействах, в частности, в семействах, где управляющими параметрами служат  $\theta$  и  $\tau$ . В основе исследования периодических траекторий с порядком вырождения два лежала геометрическая конструкция уже с тремя подковами, в отличие от конструкции с двумя подковами, которая была использована при доказательстве теоремы 3. Если задействовать большее число полосок и подков, то, в принципе, можно получать периодические траектории и больших порядков вырождения, но прямое исследование неподвижных точек отображений за много обходов вдоль окрестности негрубой гомоклинической траектории слишком сложно. Поэтому здесь мы поступим по-другому. Изучим бифуркации однообходных периодических траекторий вблизи касаний высокого порядка, как установлено в теореме 5. Такие касания могут быть получены малым возмущением вблизи любого квадратичного гомоклинического касания третьего класса, поэтому для доказательства теоремы 6 возьмем порядок гомоклинического касания настолько высоким, насколько это требуется.

**Доказательство теоремы 6.** Итак, рассмотрим систему  $\bar{f}$ , которая имеет седловую периодическую траекторию с траекторией гомоклинического касания некоторого порядка  $n$ . Как и при доказательстве теоремы 5, предположим, что  $\bar{f} \in C^\infty$ . Локальное отображение  $T_0$ , по-прежнему, может быть записано в виде (2.1).

Глобальное отображение  $T_1$  вблизи траектории гомоклинического касания порядка  $n$  записывается так:

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= cx + d(y - y^-)^{n+1} + \dots,\end{aligned}\tag{6.1}$$

где в первом уравнении многоточиями обозначены члены второго порядка и выше, а во втором уравнении — члены порядка  $O(|x| + |y - y^-|^{n+1}) + O(|x| \cdot |y - y^-|)$ .

В общем  $n$ -параметрическом семействе  $\bar{f}_\varepsilon$  систем, близких к  $\bar{f}$  ( $\bar{f}_0 \equiv \bar{f}$ ), параметры  $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$  можно ввести так, что глобальное отображение  $T_1$  будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= cx + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(y - y^-) + \dots + \varepsilon_{n-1}(y - y^-)^{n-1} + \\ &\quad + d(y - y^-)^{n+1} + \dots\end{aligned}\tag{6.2}$$

Локальное отображение  $T_0$  теперь зависит от параметров, т.е.

формула (2.1) принимает вид

$$\bar{x} = \lambda(\varepsilon)x + h(x, y, \varepsilon)x^2y, \quad \bar{y} = \gamma(\varepsilon)y + g(x, y, \varepsilon)xy^2. \quad (6.3)$$

Согласно (2.2), имеем для отображения  $T_0^k : (x_0, y_0) \mapsto (x_k, y_k)$  следующее представление (см. [11], [13]):

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda(\varepsilon)^k x_0 + \lambda(\varepsilon)^k \gamma(\varepsilon)^{-k} \xi_k(x_0, y_k, \varepsilon), \\ y_0 &= \gamma(\varepsilon)^{-k} y_k + \gamma(\varepsilon)^{-2k} \eta_k(x_0, y_k, \varepsilon), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где функции  $\xi_k$  и  $\eta_k$  равномерно ограничены по  $k$  вместе со всеми производными.

Рассмотрим теперь отображение  $\tilde{T}_k(\varepsilon) \equiv T_1 T_0^k$  за один обход вдоль гомоклинической траектории. Оно определено на полоске  $\sigma_k^0$ , и следующая лемма показывает, что оно близко к полиномиальному одномерному отображению.

**Лемма 3.** *С помощью линейного преобразования координат и параметров отображение  $\tilde{T}_k$  может быть приведено к виду<sup>1)</sup>*

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y + O(|\lambda\gamma|^k + |\gamma|^{-k/n}), \\ \bar{Y} &= E_0 + E_1 Y + \dots + E_{n-1} Y^{n-1} + Y^{n+1} + \\ &\quad + O(|\lambda\gamma|^k + |\gamma|^{-k/n}), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где область значений новых переменных  $X, Y$  и параметров  $E_0, \dots, E_{n-1}$  растет неограниченно с ростом  $k$  и покрывает в пределе все конечные значения.

**Доказательство.** Используя (6.4) и (6.2), отображение  $\tilde{T}_k$  можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= a\lambda^k(x + \dots) + b(y - y^-) + \dots, \\ \gamma^{-k}(\bar{y} + \gamma^{-k}\eta_k(\bar{x}, \bar{y})) &= c\lambda^k(x + \dots) + \\ &\quad + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(y - y^-) + \dots + \varepsilon_{n-1}(y - y^-)^{n-1} + \\ &\quad + d(y - y^-)^{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Заметим, что координаты, которые мы используем на полоске  $\sigma_k^0$ , совпадают с координатами  $(x', y')$  § 3:  $x'$  совпадает с исходной координатой  $x$ , а  $y' = y_k$  — это  $y$ -координата  $k$ -ой итерации точки под действием отображения  $T_0$ .

<sup>1)</sup>Напомним, что  $|\lambda\gamma| < 1$ , поэтому  $O(\cdot)$ -члены в (6.5) стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ .

Сдвигом начала координат:  $x \rightarrow x + x^+$ ,  $y \rightarrow y + y^-$  отображение (6.6) приводится к виду

$$\begin{aligned} \bar{x} &= by + O(\lambda^k) + O(y^2), \\ \gamma^{-k}\bar{y} + \gamma^{-2k}O(|\bar{y}|) &= (\varepsilon_0 - \gamma^{-k}y^- + c\lambda^k x^+ + \dots) + \\ &\quad + \varepsilon_1 y + \dots + \varepsilon_{n-1} y^{n-1} + dy^{n+1} + \\ &\quad + O(y^{n+2}) + \lambda^k O(|x| + |y|). \end{aligned}$$

Если теперь отнормировать координаты и параметры следующим образом

$$\begin{aligned} x &= bd^{-1/n} \gamma^{-k/n} X, \quad y = d^{-1/n} \gamma^{-k/n} Y, \\ (\varepsilon_0 - \gamma^{-k} y^- + c\lambda^k x^+ + \dots) &= d^{-1/n} \gamma^{-k(1+1/n)} E_0, \\ \varepsilon_j &= d^{-1/n} \gamma^{-k} \gamma^{\frac{k}{n}(j-1)} E_j, \end{aligned}$$

то отображение примет вид (6.5), что завершает доказательство леммы.

По лемме 3 любые бифуркации, встречающиеся в отображении (6.5) при произвольных конечных значениях  $E_0, \dots, E_{n-1}$  в конечной области  $(X, Y)$ , встречаются вблизи гомоклинического касания порядка  $n$ . Так, это отображение имеет неподвижную точку с мультипликатором  $\nu = \pm 1$  при

$$(X, Y) = 0 + \dots, \quad E_0 = 0 + \dots, \quad E_1 = \nu + \dots, \quad (6.7)$$

где многоточия обозначают члены, стремящиеся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ . Центральное многообразие этой точки касается в ней собственного вектора матрицы линеаризации, отвечающего мультипликатору  $\nu$ , т.е. оно имеет вид  $X = \nu^{-1}Y + O(Y^2)$ . Ограничение отображения (6.5) на такое многообразие имеет вид

$$\bar{Y} = \sum_{j=0}^{n-1} E_j Y^j + Y^{n+1} + \dots,$$

и мы всегда можем выбрать

$$E_0 = 0 + \dots, \quad E_1 = \pm 1 + \dots, \quad E_j = 0 + \dots \quad (2 \leq j \leq n-1)$$

так, чтобы получить неподвижную точку порядка вырождения  $n$  с мультипликатором  $\nu = 1$  или неподвижную точку порядка вырождения  $[n/2] - 1$  с мультипликатором  $\nu = -1$ . В случае, когда  $n \geq r$ , соответствующая неподвижная точка будет иметь бесконечный (неопределенный) порядок вырождения: при значениях параметров (6.7) ограничение отображения (6.5) на центральное многообразие будет выглядеть как  $\bar{Y} = \nu Y + o(Y^r)$ . В силу теоремы 4, вытекает теорема 6.

Ясно, что в случае неопределенного порядка вырождения периодической траектории можно так сколь угодно мало локально

$C^r$ -гладко возмутить исходную систему, что ограничение отображения (6.5) на центральное многообразие в некоторой достаточно малой окрестности нуля будет выглядеть уже как  $\bar{Y} = Y$  при  $\nu = 1$  и  $\bar{Y} = -Y$  при  $\nu = -1$ . Тем самым, получаем континуум (однопараметрическое семейство) негрубых периодических точек. Назовем такие семейства *периодическими лентами*. Таким образом, из теоремы 6 вытекает

**Утверждение 3.** *В множестве систем с гомоклиническими касаниями третьего класса плотны системы с периодическими лентами.*

Отметим, что лемма 3 содержит больше информации, чем необходимо для доказательства теоремы 6. Она показывает, что отображение первого возвращения вблизи гомоклинического касания порядка  $n$  близко (в подходящих координатах) к одномерному полиномиальному отображению с произвольными конечными коэффициентами. Можно утверждать и большее: вблизи квадратичного касания можно найти такое многообходимое отображение Пуанкаре, которое (в некоторых перемасштабированных координатах)  $C^r$ -близко к отображению  $\bar{X} = Y$ ,  $\bar{Y} = \Phi(Y)$  с любой наперед заданной  $C^r$ -гладкой функцией  $\Phi(Y)$  (определенной на интервале  $[-1, 1]$ ).

Этот результат основывается на исследовании отображений первого возвращения в окрестности гомоклинического касания, отвечающего локальному совпадению устойчивого и неустойчивого многообразий седловой периодической траектории (согласно утверждению 1, системы с такими касаниями плотны в  $H$ ). Пусть  $\hat{f}$  — именно такой диффеоморфизм. Считаем, что  $\hat{f} \in C^\infty$  и что произведение мультипликаторов  $\lambda$  и  $\gamma$  седловой периодической траектории, которая имеет гомоклиническую ленту, меньше единицы по абсолютной величине. Отображение  $T_0$  для диффеоморфизма  $\hat{f}$  задается формулой (2.1), а глобальное отображение  $T_1$  вблизи гомоклинической ленты имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + O[(|x| + |y - y^-|)^2], \\ \bar{y} &= \beta(x, y), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где

$$\beta(0, y) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |y - y^-| \leq \rho \quad (6.9)$$

для некоторого достаточно малого  $\rho > 0$ . Отображение  $T_1$  действует из окрестности (размера  $\rho$ ) некоторой гомоклинической точки  $M^-(0, y^-)$  в окрестность гомоклинической точки  $M^+(x^+, 0)$ . Возмутим теперь диффеоморфизм  $\hat{f}$  специальным образом, имен-

но положим, что отображение  $T_1$  задается формулой

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + \dots, \\ \bar{y} &= \tilde{\phi}(y) \cdot \chi(x, y) + \beta(x, y),\end{aligned}\quad (6.10)$$

где  $\chi$  тождественно равна единице в окрестности точки  $M^-$  размера  $\rho$  и равна тождественно нулю вне окрестности точки  $M^-$  размера  $2\rho$ . Это соответствует тому, что мы рассматриваем некоторое функциональное семейство  $\hat{f}_\phi$  диффеоморфизмов, совпадающих с  $\hat{f}$  всюду, кроме окрестности точки  $M^-$ , а вблизи точки  $M^-$  — задаваемых формулой (6.10). Ясно, что если  $\rho$  было выбрано достаточно малым, то отображение  $T_0$  останется таким же, как и для  $\hat{f}$ .

Пусть  $X_K$  — множество  $C^r$ -гладких функций, определенных на интервале  $[-1, 1]$  и ограниченных в  $C^r$ -норме константой  $K > 0$ . Пусть  $\Phi \in X_K$ . Тогда мы зададим  $\tilde{\phi}$  в (6.10) формулой

$$\tilde{\phi}(y) = (\rho\Phi(\frac{y - y^-}{\rho}) + y^-)\gamma^{-k}. \quad (6.11)$$

Комбинируя формулу (2.2) для  $T_0^k$  с (6.10), получаем, что отображение  $T_1 T_0^k$  на полоске  $\sigma_0^k$  имеет следующий вид при  $|y - y^-| \leq \rho$  (в тех же координатах, что и в лемме 3):

$$\begin{aligned}\bar{x} - x^+ &= a\lambda^k(x + \dots) + b(y - y^-) + O(|y - y^-|^2), \\ \gamma^{-k}(\bar{y} + \gamma^{-k}\eta_k(\bar{x}, \bar{y})) &= \tilde{\phi}(y - y^-) + \\ &+ \beta(\lambda^k(x + \dots), y - y^-).\end{aligned}\quad (6.12)$$

Заметим, что  $\beta = O(|\lambda|^k)$  в силу (6.9), так что  $\gamma^k\beta$  стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  (поскольку  $|\lambda\gamma| < 1$ ). Теперь замена координат

$$\frac{(x - x^+)}{b\rho} + \dots = X, \quad \frac{(y - y^-)}{\rho} = Y$$

приводит отображение  $T_1 T_0^k$  к виду

$$\bar{X} = Y + \rho O(Y^2) + O(\lambda^k), \quad \bar{Y} = \Phi(Y) + O(\lambda^k \gamma^k),$$

что и требовалось.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева С.Л., Шильников Л.П. О бифуркациях периодических движений в системах с гомоклинической петлей седло-фокуса // Дифференц. уравнения. — 1997. — 33, № 4. — С. 440–447 (РЖМат, 1997, 10Б198)

2. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность// Методы качеств. теории дифференц. уравнений. — Горький, 1983. — С. 3–26 (РЖМат, 1984, 10Б367)
3. *Быков В.В., Шильников А.Л.* О границах области существования аттрактора Лоренца// Методы качеств. теории дифференц. уравнений. — Горький. — 1989. — С. 151–159 (РЖМат, 1990, 12Б326)
4. *Гаерилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I// Мат. сб. — 1972. — 88, № 4. — С. 475–492 (РЖМат, 1972, 11Б292); II// Мат. сб. — 1973 — 90, № 1 — С. 139–157 (РЖМат, 1973, 5Б839)
5. *Гонченко С.В.* Нетривиальные гиперболические подмножества систем с негрубой гомоклинической кривой// Методы качеств. теории дифференц. уравнений. — Горький. — 1984. — С. 89–102 (РЖМат, 1986, 2Б310)
6. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Докл. АН СССР. — 1991. — 320, № 2, С. 269–272
7. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Методы качеств. теории и теории бифуркаций/ Нижегород. гос. ун-т. — Новгород, 1991. — С. 36–61 (РЖМат, 1993, 1Б205)
8. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* О существовании областей Ньюхауса в окрестности систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай)// Докл. АН (Россия). — 1993. — 329, № 4. — С. 404–407 (РЖМат, 1993, 9Б176)
9. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Докл. АН (Россия). — 1993. — 330, № 2. — С. 144–147 (РЖМат, 1993, 10Б176)
10. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми// Докл. АН СССР. — 1986. — 286, № 5. — С. 1049–1053 (РЖМат, 1986, 7А673)
11. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Изв. Росс. АН. Сер. мат. — 1992. — 56, № 6. — С. 1165–1196 (РЖМат, 1993, 9Б195)
12. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической траекторией// Укр. мат. ж. — 1987. — 39, № 1. — С. 21–28 (РЖМат, 1987, 6Б1031)
13. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* Инварианты  $\Omega$ -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией// Укр. мат. ж. — 1990. — 42, № 2. — С. 153–159
14. *Овсянников И.М., Шильников Л.П.* О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса// Мат. сб. — 1986. — 130, № 4. — С. 552–570 (РЖМат, 1986, 12Б406)
15. *Стенькин О.В., Шильников Л.П.* О бифуркациях периодических движений вблизи негрубой гомоклинической кривой// Диф-

- ференц. уравнения. — 1997. — 33, № 3. — С. 377–384 (РЖМат, 1997, 10Б197)
16. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Пример дикого странного аттрактора// Мат. сб. — 1998. — 189, № 2. — С. 137–160 (РЖМат, 1998, 12Б893)
  17. *Шильников Л.П.* Об одном случае существования счетного множества периодических движений// Докл. АН СССР — 1965. — 160, № 3. — С. 558–561 (РЖМат, 1966, 8Б263)
  18. *Шильников Л.П.* "Об одной задаче Пуанкаре—Биркгофа// Мат. сб. — 1967. — 74, № 4, С. 378–397 (РЖМат, 1968, 9Б217)
  19. *Шильников Л.П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус// Мат. сб. — 1970. — 81, № 1. — С. 92–103 (РЖМат, 1970, 5Б312)
  20. *Gaspard P., Gonchenko S.V., Nicolis G., Turaev D.V.* Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus// Nonlinearity. — 1997. — 10, № 2. — С. 409–423 (РЖМат, 1996, 10Б194)
  21. *Gonchenko S.V., Shil'nikov L.P., Turaev D.V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits// Int. J. CHAOS. — 1996. — 6, № 1. — С. 15–31
  22. *Gonchenko S.V., Shil'nikov L.P., Turaev D.V.* On models with non-rough Poincaré homoclinic curves// Phys. D. — 1996. — 62, № 1–4, С. 1–14
  23. *Gonchenko S.V., Sten'kin O.V., Turaev D.V.* Complexity of homoclinic bifurcations and  $\Omega$ -moduli// Int. J. "Bifurcation and Chaos". — 1996. — 6, № 6. — С. 969–989
  24. *Newhouse S.E.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks// Topology. — 1974. — 13. — С. 9–18 (РЖМат, 1974, 12А374)
  25. *Newhouse S.E.* The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms// Publ. Math. IHES. — 1979. — 50. — С. 101–151
  26. *Newhouse S.E., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms// Publ. Math. Inst. haute. e ud sci. — 1983. — № 57. — С. 5–72 (РЖМат, 1984, 8А616)
  27. *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks// Preprint IMPA, 1992
  28. *Shil'nikov A.L., Shil'nikov L.P., Turaev D.V.* Normal forms and Lorenz attractors// Int. J. Bifurcations and Chaos. — 1994. — 1, № 4, С. 1123–1139
  29. *Shil'nikov L.P., Shil'nikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I// World Sci. — 1998

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
 ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ,  
 НИЖНИЙ НОВГОРОД, РОССИЯ