АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(современная нелинейная динамика в приложении
к моделированию турбулентности)

КИЕВ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УССР
1986

УДК 517.9

Д.В. Тураев, Л.П. Шильников

БИФУРКАЦИИ КВАЗИАТТРАКТОРОВ ТОР-ХАОС

Переход к хаосу через разрушение двумерного тора является одним из основных сценариев возникновения стохастических колебаний. Он типичен для ряда задач гидродинамики, радиофизики, биофизики и т.д. и характеризуется следующей цепочкой перестроек: состояние равновесия - периодическое движение - квазипериодическое с двумя частотами - резонансное периодическое движение - стохастичность. На языке теории бифуркаций это означает, что в результате бифуркации Андронова-Хопфа мягко рождается устойчивое периодическое движение, которое затем теряет устойчивость, а от него рождается двумерный устойчивый гладкий инвариантный тор с "квазипериодической" структурой поведения траекторий. Затем появляется устойчивое периодическое движение L^+, так что, если на торе только два грубых периодических движения L^+ и L^-, то тор есть замыкание неустойчивого многообразия $W^u_{L^-}$ седлового периодического движения L^-. Если $W^u_{L^-}$ примыкает к L^+ гладко, то тор гладкий; в противном случае тор негладкий. Разрушение негладкого тора в основных случаях происходит [1]: 1) путем исчезновения L^+; 2) появлением у L^- негрубой гомоклинической траектории; 3) в результате потери устойчивости L^+, связанной с переходом через единичную окружность либо одного отрицательного мультипликатора, либо двух комплексно-сопряженных. В первом случае при исчезновении L^+ может сразу возникнуть квазиаттрактор [2] - притягивающее предельное множество, содержащее как нетривиальное гиперболическое множество, так и, вообще говоря, устойчивые периодические движения больших периодов и с узкими областями притяжения. Это установлено в работах [1,3] в случае так называемой большой петли. Во втором случае появление квазиаттрактора также связано с исчезновением L^+, но здесь негрубое периодическое движение, возникающее в результате слияния L^+ и L^-, имеет гомоклиническую траекторию. Подобное явление исследовалось в [4] (теорема 1). Переход к хаосу в третьем случае обычно не является прямым, поскольку появлению сложной структуры предшествует каскад простых бифуркаций (в частности, удвоения периода). Заметим, что возникающие при разрушении тора квазиаттракторы носят название тор-хаоса.

В настоящей работе мы продолжаем исследование первого случая. Напомним постановку задачи.

Рассмотрим однопараметрическое семейство C^r - гладких $(m+2)$-мерных динамических систем X_μ, гладко зависящих от параметра μ, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$. Будем предполагать, что при $\mu = 0$ система X_μ имеет негрубое периодическое движение типа седло-узел, т.е. все мультипликаторы, кроме одного, равного единице, лежат внутри единичного круга и не равна нулю первая ляпуновская величина. Предположим, что W_L^u - неустойчивое многообразие L, являющееся гомеоморфным образом $R^1 \times S^1$, не пересекается с W_L^{ss} и $\partial W_L^u = L$. В этом случае $\overline{W}_L^u$ будет либо тором, либо бутылкой Клейна. Будем предполагать, что имеет место первый случай.

Будем предполагать, что μ входит общим образом и что при $\mu > 0$ в некоторой окрестности U периодического движения L периодических движений нет, а при $\mu < 0$ периодических движений два; другими словами, на центральном многообразии имеет место касательная бифуркация вида $\bar{z} = \mu + z + \ell_2 z^2 + \ldots$, где ℓ_2 - положительная ляпуновская величина.

Известно [3], что если тор гладкий, то при достаточно малых $|\mu|$ также будут существовать гладкие торы. Именно этот случай и описывает переход от режима синхронизации к режиму биений.

Всюду ниже предполагается, что $\overline{W}_L^u$ - негладкий тор.

Как было отмечено выше, при исчезновении L и условии большой петли при всех достаточно малых $\mu > 0$ будет существовать квазиаттрактор тор-хаос. В общем случае ситуация сложнее, хотя здесь может иметь место сложная структура: как показано в [5], в любой окрестности системы X_0 (в пространстве C^∞ - гладких систем с C^5 - нормой) имеются системы с грубой гомоклинической траекторией. В техническом плане использование пяти производных связано с вложением отображения на центральном многообразии в поток при $\mu = 0$. Мы воспользуемся этим обстоятельством. Так, имеет место следующая лемма.

Л е м м а. Пусть $r = k+5$ $(k \geqslant 2)$. Тогда существуют такие координаты, что X_μ в окрестности U можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= R_0(x,\mu) + \mu x R_1(x,\mu,\varphi),\\
\dot{y} &= A(x,\mu,\varphi,y)\, y,\\
\dot{\varphi} &= 1,
\end{aligned}$$

где $x \in R^1$, $y \in R^m$, $\varphi \in S^1$, правые части – C^k – гладкие функции переменных φ, x и y, непрерывно зависящие от μ,

$$R_0 = \mu + x^2 + \dots, \qquad \int_0^1 R_1 d\varphi = 0.$$

Выбрав подходящее малое $d > 0$, можно получить, что на пластинке $S: x = d$, $\|y\| < \varepsilon$ при малых $\mu > 0$ определено отображение $T_\mu : S \to S$. Можно также показать, что найдутся монотонная функция $\vartheta(\mu)$ такая, что $\vartheta(\mu) \sim \mu^{1/4}$, и $f(\varphi) \in C^k$, что отображение T_μ в переменных φ, z, где $y = \vartheta z$, записывается в виде

$$\bar{z} = h(z, \varphi, \vartheta), \tag{I}$$
$$\bar{\varphi} = 1/\vartheta^2 + f(\varphi) + g(\varphi, z, \vartheta) \pmod 1,$$

где g и h – C^k – функции по φ и z, периодичны по φ и стремятся к нулю вместе с первыми производными по φ и z при $\vartheta \to 0$. Так как мы рассматриваем случай, когда $\overline{W}_L^u$ – тор, то $f(\varphi) = \varphi + f_1(\varphi)$, где $f_1(\varphi)$ – периодическая функция. Заметим также, что множество критических точек $f(\varphi)$ непусто тогда и только тогда, когда $\overline{W}_L^u$ – негладкий тор. Положим $\delta = \max\limits_{\varphi} \max\limits_{\psi \le \varphi} (f(\psi) - f(\varphi))$. На этом языке случай большой петли означает, что $\delta > 1$.

Т е о р е м а 1. Если $\delta > 1$, то существует такое $\bar{\mu} > 0$, что отрезок $(0, \bar{\mu})$ покрывается последовательностью интервалов (μ_n^1, μ_n^2), $\mu_n^1 \to 0$ и $\mu_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, где одному концу интервала отвечает рождение неподвижной точки с гомоклинической траекторией, $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$ – наличие седловой неподвижной точки с грубой гомоклинической траекторией, а другому концу интервала – либо негрубая гомоклиническая траектория седловой неподвижной точки, либо негрубая неподвижная точка с гомоклинической траекторией.

Т е о р е м а 2. Если $\delta > 0$ и все критические точки отображения $f(\varphi)$ имеют конечный порядок, то найдется последовательность непересекающихся интервалов $(\mu_n^1, \mu_n^2) \to 0$ такая, что при $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$ отображение T_μ имеет периодическую точку с грубой гомоклинической траекторией.[ж)]

Т е о р е м а 3. При достаточно малом $\delta > 0$ найдется последовательность интервалов $(\mu_n^3, \mu_n^4) \to 0$ такая, что при $\mu \in (\mu_n^3, \mu_n^4)$ отображение T_μ имеет гомеоморфную окружности инвариантную кривую с рациональным числом вращения.

Из теорем 2 и 3 следует, что в отличие от случая $\delta > 1$ при

ж) Близкая теорема анонсирована в [6].

исчезновении L и изменении μ наблюдается перемежаемость простых и сложных структур. Подобное явление было обнаружено ранее Картрайт, Литлвудом и Левинсоном для сингулярного уравнения Ван-дер-Поля с периодической внешней силой.

В качестве примера рассмотрим отображение $T_{\mu,a}$ с $f = \varphi + a \sin 2\pi\varphi$. Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рисунке. Как видно, эта диаграмма весьма аналогична бифуркационной диаграмме, построенной в [1] в связи с исследованием задачи о воздействии внешней периодической силы на автоколебательную систему, в предположении, что устойчивый предельный цикл проходит вблизи седла (см. [7]).

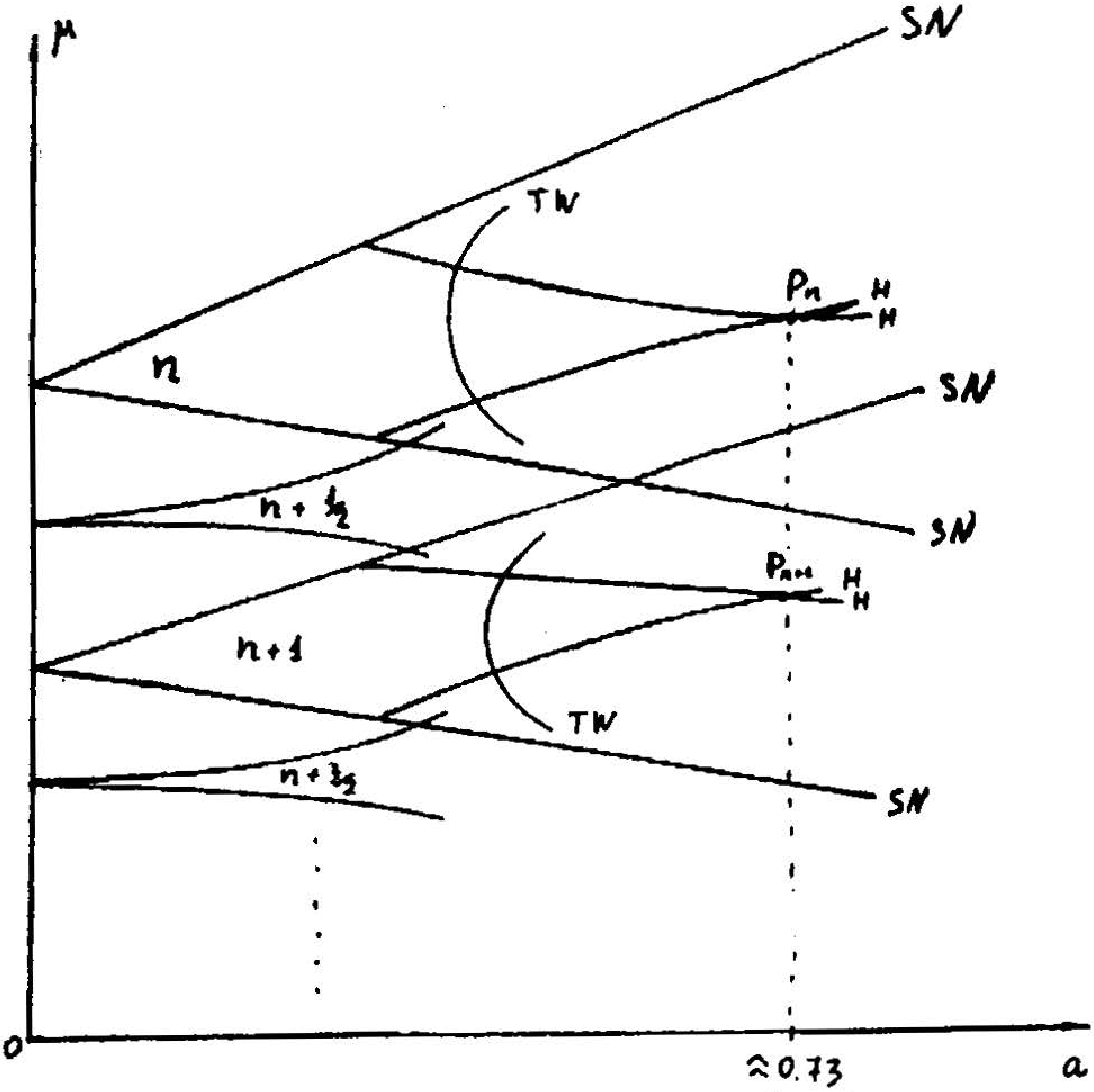

Рис. 1

Индексом SN обозначены кривые, отвечающие негрубым неподвижным и периодическим точкам типа седло-узел. Две такие кривые, выходящие из точки $(P/q\ ,\ 0\ )$, где $P/q = \mu^{-\frac{1}{2}}$ и p, q – целые, ограничивают область, которую будем называть P/q – клювом синхронизации. На рисунке изображены только (n) – и $(2n+1/_2)$ – клювы синхронизации, где n –целое. Из одного замечания Арнольда следует, что в рассматриваемом случае имеются все (P/q) – клювы синхронизации. Заметим, что при $2a\pi<1$ клювы синхронизации не пересекаются.

Через H обозначены кривые, соответствующие грубой неподвижной точке типа седло с негрубой гомоклинической траекторией. Их в (n) – клювах две и они пересекаются в точках P_n, которым отвечают седла с двумя негрубыми гомоклиническими траекториями. Вообще, подобным свойством для некоторой последовательности (μ_n, δ_n), где $\mu_n \to 0$, $\delta_n \to 1$ при $n \to \infty$, обладают отображения T_{μ_n, δ_n} двупараметрического семейства $T_{\mu,\delta}$ с f, имеющей не более двух точек, где $f'' = 0$.

Кривые H кончаются в точках на SN. Этим точкам соответствуют негрубые гомоклинические кривые неподвижных точек типа седло-узел. Точкам SN выше этих точек будут соответствовать седло-узлы с трансверсальным пересечением W_1^u и W^{ss}, где через W^{ss} обозначено сильно устойчивое многообразие седло-узла, разделяющие узловую и седловую области.

Кривые TW соответствуют негрубой неподвижной точке с мультипликатором (-1). Здесь при возрастании a следует ожидать каскада бифуркации удвоения, а, следовательно, и сложной структуры [ж)]. Однако между предельными множествами $T_{\mu,a}$ для значений параметров из клюва синхронизации имеется различие: ниже кривых SN гомоклинические траектории не "охватывают" кольца, а выше – "охватывают". Это в общем случае удобно описывать, используя понятие числа вращения, аналогичное тому, которое ввел Пуанкаре для гомеоморфизма окружности.

Числа вращения для траекторий в одномерном случае для неоднозначного отображения отрезка и окружности введены в работах [5,10, 11]. В случае окружности основные результаты для непрерывного

[ж)] Для отображения окружности $\bar{\varphi} = \varphi + b + a\sin\varphi$ в [8] вычислено, что в этом случае в клюве синхронизации есть периодическая точка периода 3, а, следовательно, и все остальные согласно теореме Шарковского [9].

отображения установлены в [II]. Так, множества чисел вращения образуют либо точку, либо интервал вращений (точнее сегмент). В первом случае, если число вращения ρ иррационально, то предельное множество является нигде не плотным минимальным множеством. В случае, если ρ – рациональная точка, то существует периодическая точка периода ℓ такая, что ℓ делит любой период, и для T^{ℓ} имеет место порядок Шарковского. В случае, если числа вращения образуют интервал, то существует $N^{\circ} \in N$ такое, что имеются периодические точки всех периодов, больших N°. Заметим, что если отображение класса C^2, выполнены условия теоремы Блока-Франка и множество вращений совпадает с точкой, то ρ – рационально. Тем самым сложные множества можно различать по тому, образуют ли числа вращения точку или интервал. Нечто подобное имеет место и для отображений кольца.

Рассмотрим отображение (I) в полосе

$$\{-\infty < \varphi < \infty \quad , \quad \|z\| < \varepsilon/\nu \},$$

обозначим его через $\tilde{T}_\mu$. Каждой полутраектории $\Gamma: \{(\varphi_n, z_n)\}_{n=0}^{n=\infty}$ отображения $\tilde{T}_\mu$ поставим в соответствие число вращения $\rho(\Gamma) = \overline{\lim}\ \varphi_n / n$.

Теорема 2 на этом языке уточняется так: при $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$ из теоремы отображение имеет периодические точки со всевозможными рациональными числами вращения из некоторого интервала. При этом каждая из них имеет гомоклиническую траекторию.

Т е о р е м а 4. Если $\delta > 1/2$, то найдутся последовательности $\mu_n^1, \mu_n^2, \mu_n^3$, где $\mu_n^i \to 0$ при $n \to \infty$, $[\mu_n^1, \mu_n^2] \subset [\mu_n^1, \mu_n^3]$, такие, что I) при $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^3)$ седловая неподвижная точка имеет грубую гомоклиническую траекторию; 2) при $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$ существуют периодические траектории со всевозможными рациональными числами вращения либо из интервала $[n, n+\frac{1}{2}]$, либо из $[n+\frac{1}{2}, n+1]$, каждая из которых имеет грубую гомоклиническую траекторию. При $\mu = \mu_n^1$ у T_μ существует негрубая неподвижная точка с гомоклинической траекторией, при $\mu = \mu_n^2$ – негрубая периодическая точка с числом вращения $1/2$ (периода 2) с гомоклинической траекторией, при $\mu = \mu_n^3$ – негрубая гомоклиническая траектория седловой неподвижной точки.

Кроме того, когда f имеет не более двух точек, в которых $f' = 0$, а $\delta < 1$, но близко к единице, то можно показать, что при всех малых μ существует неподвижная точка $Q(\mu)$ типа седло-плюс [ж)] и последовательность интервалов (μ_n^1, μ_n^2), стягивающаяся к нулю при $n \to \infty$, что если $\mu \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [\mu_n^1, \mu_n^2]$, то $Q(\mu)$ имеет гомоклиническую траекторию и имеются периодические точки с любыми рациональными числами вращения. Если $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$, то все траектории имеют число вращения n, у $Q(\mu)$ нет гомоклинических траекторий, но существует с гомоклинической траекторией либо неподвижная точка типа седло-минус, либо точка периода два. При $\mu = \mu_n^i$, $i = 1,2$, $Q(\mu)$ имеет негрубую гомоклиническую траекторию.

Как показано выше (теорема 3), при малых $\delta > 0$ к $\mu = 0$ накапливаются интервалы синхронизации (μ_n^3, μ_n^4) с простой структурой предельного множества. Траекториям этого предельного множества при $\mu \in [\mu_n^3, \mu_n^4]$ соответствуют $\rho = n$, а концам отвечают неподвижные точки типа седло-узел. Если δ достаточно мало, то к точкам μ_n^i, $i = 1,2$, снова можно применить описанную теорему и построить интервалы синхронизации. Несложно подсчитать, что числа вращения на втором шаге будут $n \pm 1/m$, на третьем $n \pm 1/m(1 \pm 1/p)$ и т.д.

Последовательное применение указанной теории требует использования на каждом шаге леммы, а следовательно, увеличения числа производных. Поэтому сначала предположим, что исходное семейство систем принадлежит классу C^∞.

Цель, которую мы ставим ниже, состоит в описании множества M тех значений μ, при которых все траектории T_μ имеют одно и то же число вращения.

Рассмотрим некоторое конечное дерево $\mathcal{D}$, каждому ребру α которого поставим в соответствие рациональное число p_α / q_α, где $q_\alpha > 0$, $|p_\alpha| < q_\alpha$. Каждой вершине β дерева поставим в соответствие путь $\alpha_0(\beta), \alpha_1(\beta), \dots, \alpha_r(\beta)$ по ребрам дерева $\mathcal{D}$ из начальной вершины в β (здесь $1 + r(\beta)$ – длина пути). Рассмотрим множество $Q(\mathcal{D})$ чисел

$$\rho_{\beta, n_1, \dots, n_{r(\beta)}} = \frac{p_{\alpha_0}}{q_{\alpha_0}} + \frac{p_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}}{q_{\alpha_0} q_{\alpha_1} n_1} + \dots + \frac{p_{\alpha_r} + q_{\alpha_r}}{q_{\alpha_0} \dots q_{\alpha_r} n_1 \dots n_r},$$

где $\beta \in \mathcal{D}$, $n_j \in N$.

[ж)] Седлом-плюс (минус) мы назовем неподвижную точку с характеристическими корнями $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, m-1$, $\lambda_m > 1$ ($\lambda_m < -1$).

Легко видеть, что $Q(\mathfrak{D})$ – замкнутое подмножество множества рациональных чисел.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество C^∞ – отображений окружности степени 1 с $\delta>0$.

Теорема 5. Для открытого и всюду плотного в $\mathcal{F}$ в C^∞-топологии множества $\mathcal{F}'$, если $f\in\mathcal{F}'$, то:

1) при $\mu\notin M$ у T_μ существуют периодические точки со всевозможными рациональными числами из некоторого интервала, каждая из которых имеет гомоклиническую траекторию;

2) если $M\neq\emptyset$, то найдется дерево $\mathfrak{D}$ такое, что $M=\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} M_s$, где $M_s\to 0$ при $s\to\infty$,

$$M_s=\bigcup_{\substack{\beta,n_1,\dots,n_{r(\beta)}\\(\beta\in\mathfrak{D},\ n_j\in N)}}\left[\mu^{3,s}_{\beta,n_1,\dots,n_{r(\beta)}},\ \mu^{4,s}_{\beta,n_1,\dots,n_{r(\beta)}}\right].$$

M_s гомеоморфно $Q(\mathfrak{D})$ после отождествления $\mu^{3,s}_{\beta,n_1,\dots,n_r}$ с $\mu^{4,s}_{\beta,n_1,\dots,n_r}$. При $\mu\in[\mu^{3,s}_{\beta,n_1,\dots,n_r},\mu^{4,s}_{\beta,n_1,\dots,n_r}]$ число вращения любой траектории равно $s+\rho_{\beta,n_1,\dots,n_r}$. Границам интервалов, составляющих M, отвечает либо исчезновение периодической точки типа седло-узел, либо достижимая [12] негрубая гомоклиническая траектория.

В случае, если семейство $X_\mu\in C^{k+5}$, $2\leq k<\infty$, теорему 5 удается доказать, лишь когда f принадлежит непустому открытому подмножеству C^k – гладких отображений окружности степени один с $\delta>0$.

Список литературы

1. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Межвуз. сб.– Горький, 1983. – С. 3–26.

2. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasi-attractors // Nonlinear dynamics and turbulence.- Boston - London - Melborn, 1983.- P. 1-34.

3. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // Докл.АН СССР.-1974.-219, №6.- С.1281-1285.

4. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклинической структурой // Там же. - 1978. - 243, № 1. - С. 26-29.

5. Newhouse S., Palis Y., Takens J. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publications Math. IHES.- 1983.- N57.- P. 5-72.

6. Przytycki J. Chaos after bifurcations of a Morse-Smale diffeomorphism through a one-cycle saddle-node and iterations of an interval and a circle, Institute of Mathematics // Polish Academy of Science: Preprint 347, 1985.-62c.

7. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем // Прикл. математика и механика. -1977.-42, № 4.-С. 618-627.

8. Белых В.Н., Лебедева Л.В. Исследование одного отображения окружности // Там же.- 1982.- 46, № 5.-С. 771-776.

9. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр.мат.журн.-1964.-16, № 1.- С.61-71.

10. Ito R. Rotation sets are closed // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.- 1981.- 89, N1.- P. 107-111.

11. Малкин М.И. Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности // Укр. мат. журн. - 1983. - 35, № 3. - С. 327-332.

12. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I-II // Мат. сборник. - 1973. - 88, № 8. - С. 475-492; 1973. - 90, № 1. - С. 139-156.