МАТЕРИАЛЫ XXII ВСЕСОЮЗНОЙ НАУЧНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

«Студент и научно-технический прогресс»

МАТЕМАТИКА

Д.В.Тураев
Горьковский университет

БИФУРКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМЕ С ДВУМЯ ПЕТЛЯМИ СЕПАРАТРИС

Рассмотрим двупараметрическое семейство гладких динамических систем S_μ, заданных на двумерном гладком многообразии. Предполагается, что S гладко зависит от $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ и S_0 имеет изолированное состояние равновесия O типа седло с двумя петлями сепаратрис, которые обозначим через Γ_1 и Γ_2. Предполагается также, что седловая величина $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ (где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения системы в точке O при $\mu = 0$) отлична от нуля и отрицательна.

Существует окрестность точки O такая, что при всех достаточно малых μ уравнения векторного поля в этой окрестности имеют вид:

$$\dot{\xi} = \lambda_1(\mu)\xi + f(\xi, \eta; \mu)\xi,$$
$$\dot{\eta} = \lambda_2(\mu)\eta + g(\xi, \eta; \mu)\eta,$$

где $\lambda_1(\mu) < 0$, $\lambda_2(\mu) > 0$ – корни характеристического уравнения в точке O.

Уравнения устойчивых сепаратрис в этой окрестности будут $\eta = 0$, а неустойчивых – $\xi = 0$. Выберем достаточно малое $d > 0$ и построим секущие к устойчивым сепаратрисам $\Pi_1 : \xi = d$, $\Pi_2 : \xi = -d$ и секущие к неустойчивым сепаратрисам $\Pi_3 : \eta = d$, $\Pi_4 : \eta = -d$. По условию при $\mu = 0$ сепаратрисы образуют петли. Из этого следует, что при малых μ и малых ξ траектории, выходящие из точек (ξ, d) секущей Π_3 (или из точек $(\xi, -d)$ секущей Π_4), возвращаются в окрестность и пересекаются с секущей Π_1 (секущей Π_2). Таким образом, определены отображения последования $T_1 : \Pi_3 \to \Pi_1$ и $T_2 : \Pi_4 \to \Pi_2$. Примем, что T_1 и T_2 имеют вид:

$$T_1 : \eta = \mu_1 + A_1(\mu)\xi + \dots, \quad T_2 : \eta = \mu_2 + A_2(\mu)\xi + \dots$$

Величины $A_1(\mu)$ и $A_2(\mu)$ отличны от нуля и носят название сепаратрисных величин. Возможны различные комбинации знаков A_1, A_2:

I) $A_1 > 0$, $A_2 > 0$,

2) $A_1 < 0$, $A_2 > 0$,

3) $A_1 < 0$, $A_2 < 0$.

На ориентируемом многообразии всегда имеет место случай I).

Известно, что из одной петли сепаратрис Γ_i с $\sigma < 0$ может рождаться только одна периодическая траектория, гомотопная Γ_i (см. [I],[2]). В случае двух петель ситуация более сложна.

Назовем циклом типа $j_1 j_2 \cdots j_n$ предельный цикл, гомотопный произведению петель $\Gamma_{j_1} \Gamma_{j_2} \ldots \Gamma_{j_n}$ ($j_k \in \{1,2\}$).

Т е о р е м а. Существуют такая малая окрестность V сепаратрисного контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O$ и такая малая окрестность $\mathcal{U}$ изменения параметров μ, что у системы S_μ при $\mu \in \mathcal{U}$ в V существует не более двух предельных циклов.

В случае I) могут быть только циклы типа I, 2, I2; в случае 2) – циклы типа I, 2, I2 и II2; в случае 3) – циклы типа I, 2, I2, $(I2)^r$ I и $(2I)^r$ 2 ($1 \leq r < \infty$).

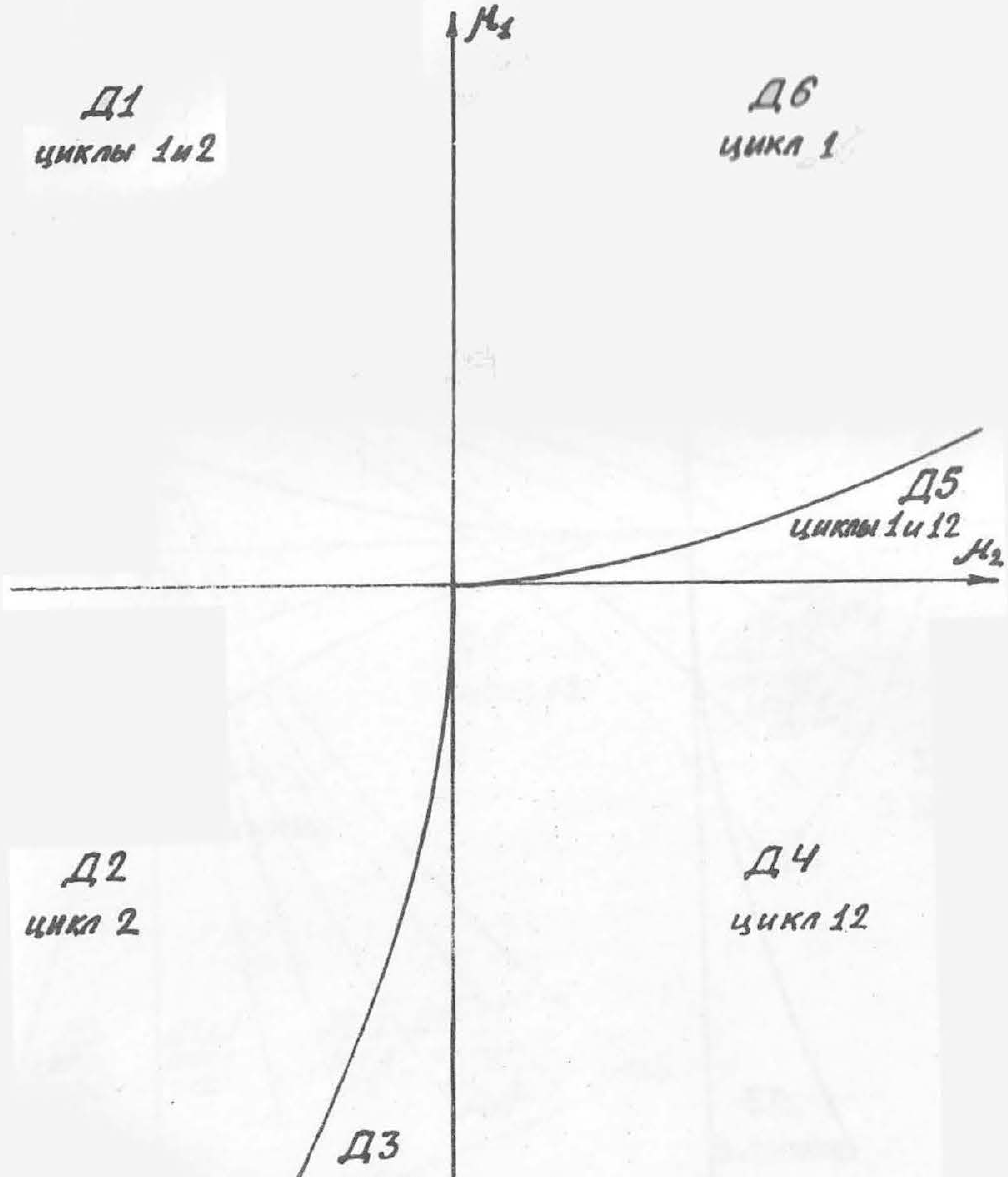
Для каждого из трех случаев построены бифуркационные диаграммы:

I) Плоскость параметров (μ_1, μ_2)(см. рис. I) разбита на 6 областей – ДI – Д6. Для каждой имеется один или два цикла, они указаны прямо на диаграмме. Смежные области обязательно имеют общий предельный цикл. (Для задачи с туннельным диодом этот случай рассмотрен в [3], для систем, близких к гамильтоновым, в [4].)

2) Плоскость разбита на 8 областей – ДI – Д8 (см. рис. 2). Для каждой области имеется один или два цикла, они указаны прямо на диаграмме.

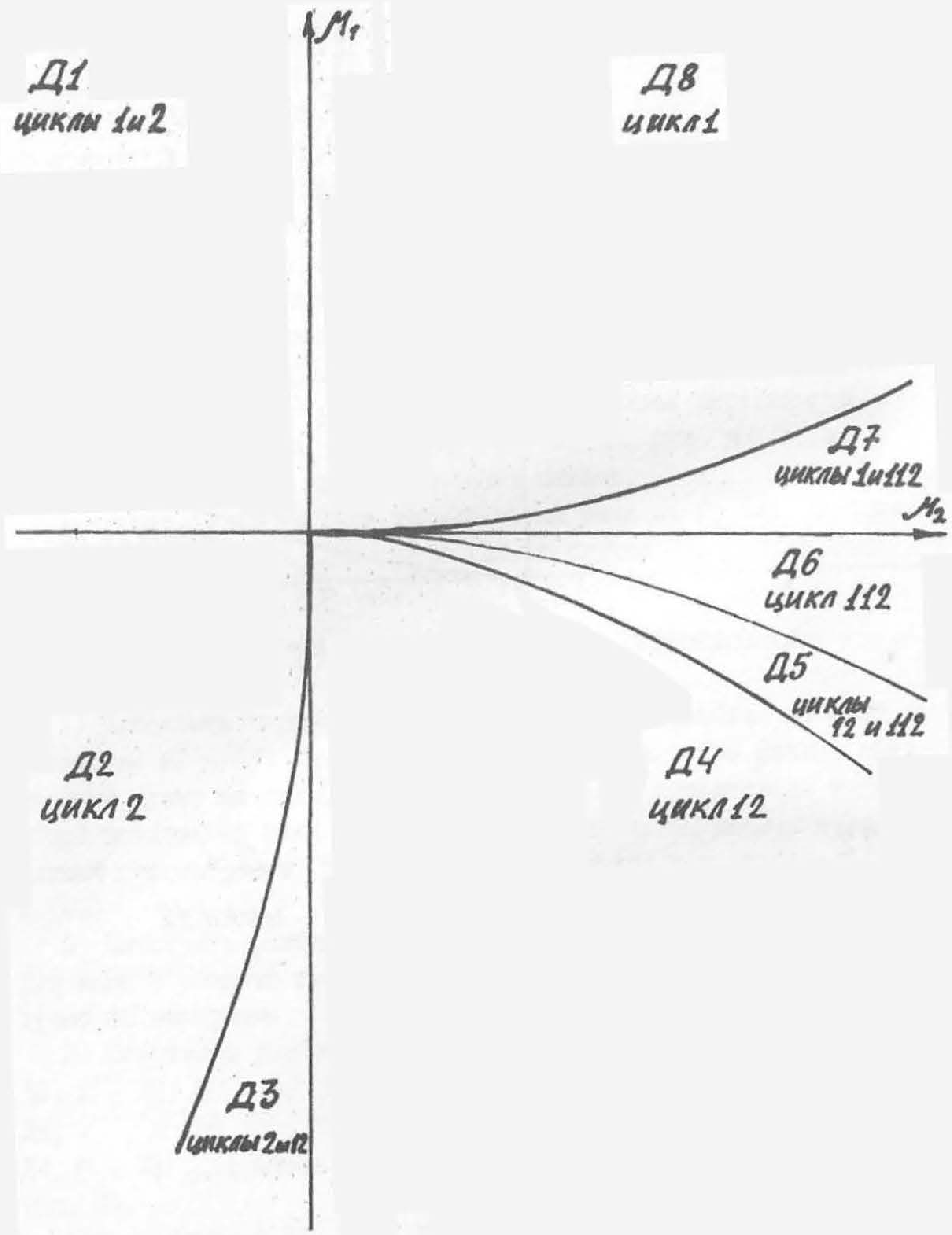
3) Плоскость разбита на счетное число областей ДI, Д2, Д3, Д5, Д7, Д8; Д6, I, I; Д6, I, 2; Д6, 2, I; Д6, 2, 2; ...; Д6, r , I; Д6, r , 2; ...; Д4, I, I; Д4, I, 2; ...; Д4, r , I; Д4, r , 2; ...; здесь r может меняться от I до ∞ (см. рис. 3).

Циклы областей ДI – Д3, Д5, Д7, Д8 указаны на диаграмме. В областях вида Д4, r , I имеется один цикл $(2I)^r$ 2, при пере-



μ_1
Д1
циклы 1и2
Д6
цикл 1
Д5
циклы 1и12
μ_2
Д2
цикл 2
Д4
цикл 12
Д3
циклы
2и12

Рис. I



M_1
M_2
Д1
циклы 1и2
Д8
цикл 1
Д7
циклы 1и112
Д6
цикл 112
Д5
циклы
12 и 112
Д4
цикл 12
Д2
цикл 2
Д3
циклы 2и12

Рис. 2

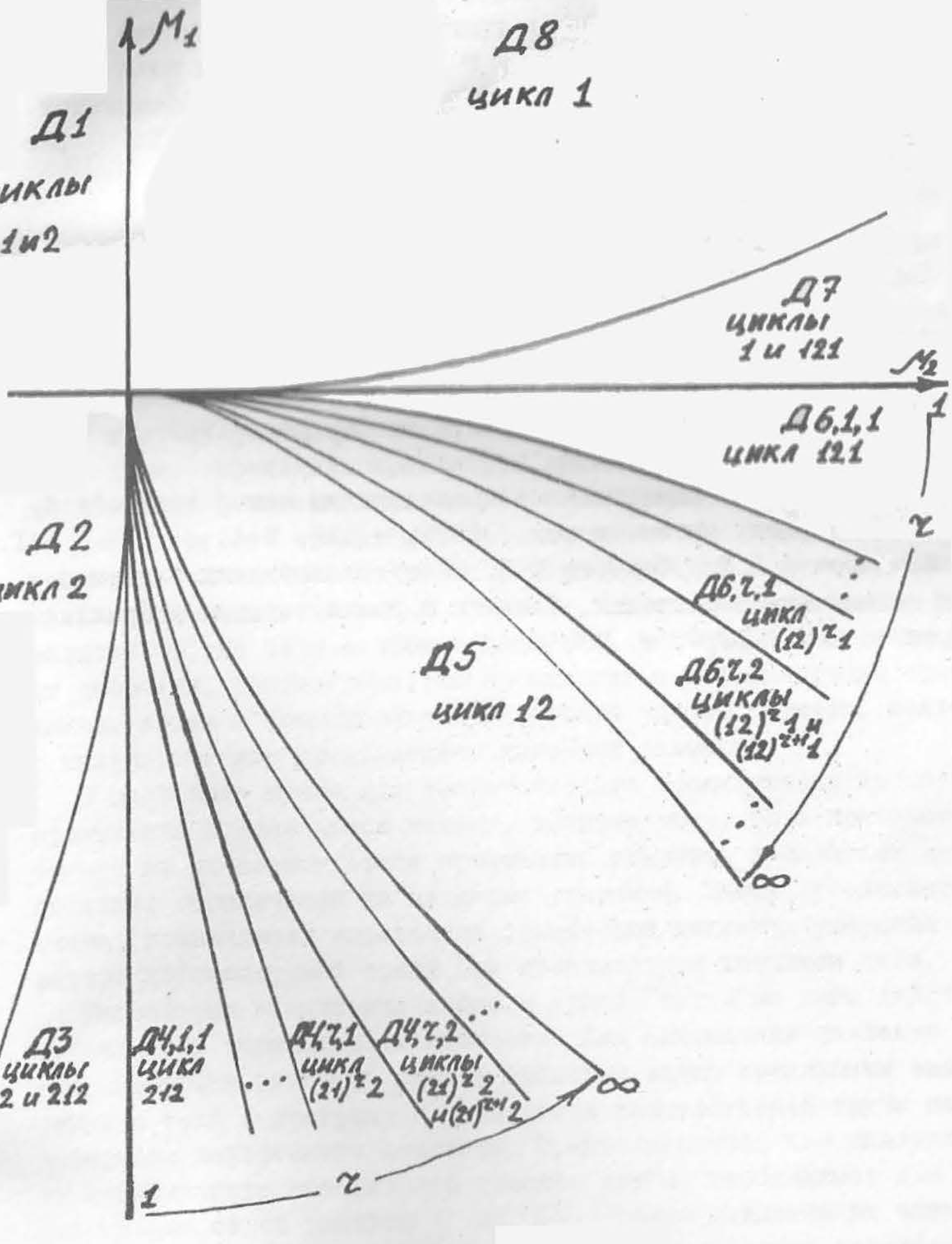

M_1
Д8
цикл 1
Д1
циклы
1и2
Д7
циклы
1 и 121
M_2
1
Д6,1,1
цикл 121
τ
Д6,τ,1
цикл
$(12)^{\tau}1$
Д6,τ,2
циклы
$(12)^{\tau}1$ и
$(12)^{\tau+1}1$
Д2
цикл 2
Д5
цикл 12
∞
Д3
циклы
2 и 212
Д4,1,1
цикл
212
Д4,τ,1
цикл
$(21)^{\tau}2$
Д4,τ,2
циклы
$(21)^{\tau}2$
и $(21)^{\tau+1}2$
∞
1
τ

Рис. 3

ходе в область Д4, r , 2 к нему добавляется цикл $(2I)^{r+1}$ 2. Величина r при приближении к границе области Д5 растет до бесконечности. В областях вида Д6, r , I имеется один цикл $(I2)^{r}$ I, при переходе в область Д6, r , 2 к нему добавляется цикл $(I2)^{r+1}$ I. При приближении к границе области Д5 r растет до бесконечности.

Литература

I. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер.- М.: Наука, 1967.

2. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий.- Матем. сб., 1963, т. 6I, № 4, с. 443 - 466.

3. Баутин А.Н. Качественное исследование одной нелинейной системы.- Прикл. матем. и мех., 1975, т. 39, № 4, с. 633 - 64I.

4. Морозов А.Д., Федоров Е.Л. Об автоколебаниях в двумерных динамических системах, близких к гамильтоновым.- Прикл. матем. и мех., 1979, т. 43, № 4, с. 602 - 6II.