Современная математика и ее приложения. Том 7 (2003). С. 92–118

УДК 517.938

О ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ КАСАНИЯМИ

© 2003 г. **С. В. ГОНЧЕНКО, Д. В. ТУРАЕВ, Л. П. ШИЛЬНИКОВ**

Аннотация. В работе изучаются динамические свойства систем из областей Ньюхауса вблизи диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку с гомоклиническим касанием, в базовых случаях: двумерном, трёхмерном, когда неподвижная точка является седло-фокусом с одним вещественным и парой комплексно сопряжённых мультипликаторов, и четырёхмерном случае седло-фокуса, у которого имеется две пары комплексно сопряжённых мультипликаторов.

СОДЕРЖАНИЕ

Гомоклинические траектории Пуанкаре, т.е. траектории, двоякоасимптотические к седловым периодическим, являются одним из наиболее притягательных объектов исследования в теории динамических систем. Это обусловлено прежде всего тем, что их наличие свидетельствует о сложной динамике. Так, в окрестности грубой гомоклинической траектории, в точках которой инвариантные многообразия седловой периодической орбиты пересекаются трансверсально, существует счетное множество периодических и континуум устойчивых по Пуассону траекторий [18, 30].

Если в системе есть хотя бы одна негрубая гомоклиническая траектория, или, как говорят, гомоклиническое касание, то это влечет существование в любой окрестности данной системы счетного множества областей негрубости, в которых системы с гомоклиническими касаниями плотны. Это

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02-01-00273 и № 01-01-00905), гранта INTAS № 2000-221, гранта DFG № 436 RUS и научной программы Университеты России (проект № 1905). Л.Ш. благодарен Научному фонду Гумбольдта за поддержку.

явление впервые обнаружил Ньюхаус в случае двумерных диффеоморфизмов [25]. В многомерном случае области Ньюхауса также существуют в окрестности любой системы с гомоклиническим касанием, как в пространстве параметров в конечно-параметрических семействах [7], так, естественно, и в пространстве динамических систем [7, 26, 27].

Сразу заметим, что динамические свойства, которые демонстрируют системы из областей Ньюхауса, характеризуются исключительной необычностью и сложностью. Так, в [6, 22] установлено, что уже в двумерном случае описание динамики систем из областей Ньюхауса требует бесконечного множества инвариантов (т.н. Ω-модулей [13, 14]), и, более того, в областях Ньюхауса плотны (в C^r-топологии с любым $r \geqslant 3$) системы как с гомоклиническими касаниями любого порядка, так и со сколь угодно вырожденными периодическими траекториями [10, 22].

В настоящей работе мы продолжаем изучение динамических свойств систем из областей Ньюхауса вблизи диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку с гомоклиническим касанием. Здесь мы ограничиваемся только так называемыми базовыми случаями: двумерным случаем, трёхмерным — когда неподвижная точка является седло-фокусом с одним вещественным и парой комплексно сопряжённых мультипликаторов, и четырёхмерным случаем седло-фокуса, у которого имеется две пары комплексно сопряжённых мультипликаторов. В общем многомерном случае динамика вблизи гомоклинического касания определяется, в основном, структрурой множества так называемых ведущих мультипликаторов неподвижной точки. В общем положении это либо пара действительных мультипликаторов, либо один действительный и пара комплексно сопряжённых, либо две пары комплексно сопряжённых. Таким образом, очевидно, что рассматриваемые диффеоморфизмы являются простейшими среди всех диффеоморфизмов с одинаковым набором ведущих мультипликаторов.

Бифуркации двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями активно изучались, начиная с работы [1]. Поэтому здесь мы уделяем основное внимание трёх- и четырёхмерным диффеоморфизмам, т.е. случаю седло-фокуса. Мы различаем три типа седло-фокусов. Неподвижную точку с мультипликаторами $\lambda e^{\pm i\varphi}$ и γ, где $0 < \lambda < 1$, $0 < \varphi < \pi$ и $|\gamma| > 1$, будем называть *седло-фокусом* $(2, 1)$. Точка называется *седло-фокусом* $(1, 2)$, когда она имеет мультипликаторы λ и $\gamma e^{\pm i\psi}$, где $0 < |\lambda| < 1$, $\gamma > 1, 0 < \psi < \pi$. Точка называется *седло-фокусом* $(2, 2)$, когда она имеет мультипликаторы $\lambda e^{\pm i\varphi}$ и $\gamma e^{\pm i\psi}$, где $0 < \lambda < 1$, $\gamma > 1$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < \psi < \pi$.

Во всех случаях мы будем предполагать, что модуль J произведения мультипликаторов не равен 1. Для определённости будем считать, что $J < 1$ (случай $J > 1$ сводится к данному переходом к обратному отображению).

Мы показываем, что, подобно двумерному случаю, в областях Ньюхауса при $J < 1$ *плотны диффеоморфизмы со счётным числом устойчивых периодических траекторий*. Ранее было известно [2, 24, 26], что устойчивые периодические траектории могут рождаться при бифуркациях гомоклинического касания при условии, что неустойчивое многообразие соответствующей седловой точки одномерно и седловая величина $\sigma \equiv |\lambda\gamma| < 1$. Как показывает наш результат, ни одно из этих условий не является необходимым. С другой стороны, отметим, что в случае $J > 1$ растяжение объёмов вблизи седловой неподвижной точки запрещает устойчивые траектории в малой окрестности гомоклинического касания, как для самой системы, так и для всех близких [23, 32]. При этом в областях Ньюхауса плотны диффеоморфизмы уже со счётным числом вполне неустойчивых периодических траекторий.

Что касается седловых периодических траекторий, то в случае седло-фокусов с гомоклиническими касаниями мы сталкиваемся со следующим существенно недвумерным явлением. Именно, мы показываем, что здесь, при выполнении определённых условий, в областях Ньюхауса *плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счётное множество седловых периодических траекторий двух и даже трёх разных типов* (т.е. с различными размерностями неустойчивых многообразий). Отметим, что размерности неустойчивых многообразий этих периодических траекторий могут даже быть больше, чем размерность неустойчивого многообразия исходной неподвижной точки. Вообще, подобное явление может быть обнаружено во многих случаях гомоклинических бифуркаций: вблизи петли седло-фокуса [15], вблизи негрубых гетероклинических контуров [9, 21, 32], вблизи гомоклинических касаний в некоторых случаях коразмерности два [5, 20, 31], и было явно использовано при построении дикого спирального аттрактора в [17]. В принципиальном плане, сосуществование траекторий с различным числом положительных показателей Ляпунова представляется нам наиболее общим свойством многомерных систем из областей Ньюхауса.

Существование *негрубых* периодических траекторий — другое характерное свойство систем из областей Ньюхауса. Известно [1, 2], что в двумерном случае при бифуркациях гомоклинического касания рождаются периодические траектории с одним мультипликатором, равным $+1$ или -1. Здесь мы показываем, что в случае седло-фокуса могут появляться периодические траектории с *двумя* или даже *тремя* мультипликаторами, равными единице по модулю, и что в соответствующих областях Ньюхауса диффеоморфизмы с такими траекториями плотны.

Бифуркации периодического движения в случае одного мультипликатора, равного $+1$ или -1, хорошо известны: это бифуркация седло-узла и бифуркация удвоения периода. В случае периодической траектории с двумя мультипликаторами на единичной окружности, например, $\nu_{1,2} = e^{\pm i\omega}$, её бифуркации могут приводить к рождению замкнутых инвариантных кривых. Здесь, в связи с проблемой о существовании счётного числа нетривиальных аттракторов, мы интересуемся, в первую очередь, устойчивыми замкнутыми кривыми. Так, мы показываем, что в случае гомоклинического касания к неподвижной точке типа седло-фокус с $J < 1$ (кроме седло-фокуса $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$, когда динамика не отличается принципиально от случая седла) в соответствующих областях Ньюхауса плотны *диффеоморфизмы со счетным множеством устойчивых инвариантных замкнутых кривых*.

В случае седло-фокуса $(2,2)$ с $\lambda\gamma^2 > 1$ бифуркации гомоклинического касания приводят к рождению периодических траекторий с тремя мультипликаторами на единичной окружности. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения, которого мы в данной работе не проводим. Заметим только, что, например, в случае мультипликаторов $(-1,-1,+1)$ соответствующая нормальная форма представляет собой систему трёх автономных дифференциальных уравнений (система Мориока—Шимицу), имеющую аттрактор лоренцевского типа [28]. Соответственно, мы можем ожидать, что в областях Ньюхауса в случае седло-фокуса $(2,2)$ с $\lambda\gamma^2 > 1$ будут плотны диффеоморфизмы со счётным числом странных аттракторов.

Основные результаты статьи были анонсированы в [8].

1. Постановка задачи и основные результаты

1.1. Основные предположения. Рассмотрим C^r-гладкий диффеоморфизм f, имеющий седловую неподвижную точку O. Предположим, что устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O)$ пересекаются нетрансверсально в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0.

Мы предполагаем, что точка O не имеет неведущих мультипликаторов. Здесь возникают четыре основных случая: двумерный, когда мультипликаторы точки O действительны, два трёхмерных, когда есть один действительный и пара комплексно сопряжённых мультипликаторов, и один четырёхмерный, когда мультипликаторы комплексны. Именно, мы предполагаем следующее условие.

A. Точка O принадлежит одному из следующих типов:

- $(1,1)$ когда мультипликаторы λ и γ точки O действительны, $|\lambda| < 1$, $|\gamma| > 1$;
- $(2,1)$ когда O имеет пару комплексных мультипликаторов $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $\lambda \in (0,1)$, $\varphi \in (0,\pi)$, и один действительный мультипликатор γ, где $|\gamma| > 1$;
- $(1,2)$ когда O имеет один действительный мультипликатор λ, где $|\lambda| < 1$, и пару комплексных мультипликаторов $\gamma_{1,2} = \gamma e^{\pm i\psi}$, где $\gamma > 1$, $\psi \in (0,\pi)$;
- $(2,2)$ когда O имеет две пары комплексных мультипликаторов: $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$ и $\gamma_{1,2} = \gamma e^{\pm i\psi}$, где $\lambda \in (0,1)$, $\gamma > 1$, $\varphi, \psi \in (0,\pi)$.

Точку O будем называть *седлом* в первом случае и *седло-фокусом* во всех остальных. Пусть J — модуль произведения мультипликаторов точки O. Предположим, что f удовлетворяет следующему условию.

B. $J < 1$ и $|\lambda\gamma| \neq 1$ в случае $(2,1)$, и $\lambda\gamma^2 \neq 1$ в случае $(2,2)$.

Введем целое число d_e (которое будем называть «эффективной размерностью»), определяемое следующим образом:

- $d_e = 1$ в случае $(1,1)$, а также в случае $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$;
- $d_e = 2$ в случае $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| > 1$, в случае $(1,2)$, а также в случае $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2 < 1$;
- $d_e = 3$ в случае $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2 > 1$.

Смысл констант J и d_e весьма прост. J — это якобиан отображения f в неподвижной точке O. Таким образом, диффеоморфизм f сжимает объемы вблизи O в случае $J < 1$, а если $J > 1$, то растягивает. Также очевидно, что, когда $J < 1$, то при итерациях отображения f любые $(d_e + 1)$-мерные объемы вблизи O будут экспоненциально сжиматься, а d_e-мерные объемы могут уже и растягиваться.

Очевидно, что условие **B** не является ограничительным, поскольку случай $J > 1$ сводится к данному переходом к обратному отображению. Надо только иметь в виду, что устойчивое многообразие при этом становится неустойчивым, т.е. случай $(1,2)$ переходит в $(2,1)$ и наоборот. Очевидным образом меняется и определение величины d_e.

Обозначим через T_0 ограничение диффеоморфизма f на достаточно малую окрестность U_0 неподвижной точки O. Будем называть T_0 *локальным отображением*. Отображение T_0 в малой окрестности точки $O(0,0)$ можно записать в следующем виде:

$$\bar{x} = Ax + \ldots, \quad \bar{y} = By + \ldots. \tag{1.1}$$

Собственными значениями матриц A и B являются устойчивые (меньшие единицы по модулю) и соответственно неустойчивые (большие единицы по модулю) мультипликаторы точки O. Отметим, что если устойчивый мультипликатор действительный, то $A = \lambda$ и x — скаляр; если же имеется пара комплексных устойчивых мультипликаторов, то $x = (x_1, x_2)$ и $A = \lambda \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Также если неустойчивый мультипликатор γ действительный, то $B = \gamma$ и y — скаляр; если же имеется пара комплексных неустойчивых мультипликаторов, то $y = (y_1, y_2)$ и $B = \gamma \left(\begin{smallmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{smallmatrix}\right)$.

Точки пересечения траектории Γ_0 с U_0 принадлежат множеству $W^s \cap W^u$ и накапливаются к O. Счетное множество этих точек лежит на W^s_{loc} и на W^u_{loc}. Пусть $M^+ \in W^s_{\mathrm{loc}}$ и $M^- \in W^u_{\mathrm{loc}}$ — какие-либо две точки траектории Γ_0 и пусть $M^+ = f^{k_0}(M^-)$ для некоторого натурального k_0. Пусть Π^+ и Π^- — некоторые достаточно малые окрестности точек M^+ и M^-, лежащие в U_0. Отображение $T_1 \equiv f^{k_0} : \Pi^- \to \Pi^+$ будем называть *глобальным отображением*.

По условию, $T_1(W^u_{\mathrm{loc}})$ касается W^s_{loc} в точке M^+. Будем предполагать, что это касание *простое*, т.е. выполнены следующие условия:

C. $T_1(W^u_{\mathrm{loc}})$ и W^s_{loc} имеют в точке M^+ единственный общий касательный вектор;
D. касание поверхностей $T_1 W^u_{\mathrm{loc}}$ и W^s_{loc} в точке M^+ квадратичное.

1.2. О бифуркационных параметрах. Пусть f — диффеоморфизм с гомоклиническим касанием, удовлетворяющим условиям **A**–**D**. Близкие к f диффеоморфизмы, имеющие негрубую гомоклиническую траекторию, близкую к Γ_0, образуют в пространстве C^r-гладких диффеоморфизмов с C^r-топологией гладкую бифуркационную поверхность $\mathcal{H}$ коразмерности 1.

В настоящей статье рассматриваются бифуркации в параметрических семействах f_ε, трансверсальных к $\mathcal{H}$ при $\varepsilon = 0$. При этом минимальное число управляющих параметров равно в точности d_e. В качестве первого параметра мы берём параметр μ, который оценивает расщепление $W^s(O)$ и $W^u(O)$ вблизи точки M^+ (точное определение μ в терминах коэффициентов тейлоровского разложения глобального отображения T_1 см. в разделе 2, лемма 2.3). Формально говоря, μ — это гладкий функционал, определённый для близких к f диффеоморфизмов, такой, что бифуркационная поверхность $\mathcal{H}$ задается уравнением $\mu(f) = 0$. Семейство f_ε трансверсально к $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}(\mu(f_\varepsilon)) \neq 0$ при $\varepsilon = 0$. Именно это условие и позволяет нам взять μ в качестве первой компоненты вектора параметров ε.

Если $d_e \geqslant 2$, то дополнительно к μ необходим еще один или два (когда $d_e = 3$) управляющих параметра. В этом случае мы требуем, чтобы семейство f_ε при $\varepsilon = 0$ было трансверсально не только к бифуркационной поверхности $\mathcal{H}$, но и к поверхностям $\varphi = \mathrm{const}$ и/или $\psi = \mathrm{const}$, где φ и ψ — угловые аргументы комплексных мультипликаторов седло-фокуса O. Это условие позволяет нам брать в качестве управляющих параметров непосредственно параметры μ, $\varphi - \varphi_0$, $\psi - \psi_0$, где φ_0 и ψ_0 — значения φ и ψ при $\varepsilon = 0$.

Таким образом, мы полагаем:

1) $\varepsilon = \mu$ в случае $(1,1)$, а также в случае $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$;
2) $\varepsilon = (\mu, \varphi - \varphi_0)$ в случае $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| > 1$;
3) $\varepsilon = (\mu, \psi - \psi_0)$ в случае $(1,2)$, а также в случае $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2 < 1$;
4) $\varepsilon = (\mu, \varphi - \varphi_0, \psi - \psi_0)$ в случае $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2 > 1$.

Заметим, что φ и ψ являются непрерывными инвариантами топологической сопряженности на множестве неблуждающих траекторий — так называемыми Ω-модулями — для систем с гомоклиническими касаниями в случае седло-фокуса. Как показано в [19, 23], любое изменение значений этих Ω-модулей (в классе диффеоморфизмов на $\mathcal{H}$, т.е. когда исходное касание не расщеплено) может вести к бифуркациям однообходных периодических траекторий.[1] Это, в частности, объясняет, почему при исследовании бифуркаций в случаях $(2,1)$, $(1,2)$ и $(2,2)$ одного параметра μ может быть недостаточно.

Заметим, что все наши результаты здесь будут справедливы для произвольных семейств f_ε (в том числе и когда число параметров больше, чем d_e) при единственном предположении, что выполнены вышеприведённые условия трансверсальности.

Один из общих результатов о семействах f_ε — это существование в них *областей Ньюхауса*. Прежде всего, напомним следующий результат из [7].

Теорема (теорема об интервалах Ньюхауса). *Пусть f_μ — однопараметрическое семейство C^r-гладких ($r \geqslant 3$) диффеоморфизмов, трансверсальное к бифуркационной поверхности $\mathcal{H}$ диффеоморфизмов, удовлетворяющих условиям **A**–**D**.*[2] *Тогда в любой окрестности точки $\mu = 0$ существуют интервалы Ньюхауса такие, что*:

1) *в этих интервалах плотны значения параметра μ, отвечающие существованию у диффеоморфизма f_μ простого гомоклинического касания к точке O*;
2) *семейство f_μ трансверсально соответствующим бифуркационным поверхностям.*

Так как области Ньюхауса являются открытыми в C^2-топологии в пространстве динамических систем, то, применяя теорему об интервалах Ньюхауса к семейству f_ε, мы получаем следующее утверждение.

Следствие (области Ньюхауса для параметрических семейств). *В пространстве параметров ε существует последовательность открытых областей δ_j, накапливающихся к $\varepsilon = 0$, таких, что в δ_j плотны значения параметров ε, для каждого из которых диффеоморфизм f_ε имеет траекторию простого гомоклинического касания к точке O. При этом семейство f_ε трансверсально к каждой из соответствующих бифуркационных поверхностей.*

1.3. Основные результаты. Мы будем изучать свойства диффеоморфизмов f_ε из областей Ньюхауса δ_j. Для анализа бифуркаций периодических траекторий мы будем предполагать достаточную гладкость диффеоморфизмов f_ε, именно, $r \geqslant 5$.

Прежде всего рассмотрим случай $d_e = 1$ (напомним, что здесь мы рассматриваем однопараметрические семейства с $\varepsilon = \mu$).

Теорема 1.1. *В случаях седла $(1,1)$ и седло-фокуса $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| < 1$ в интервалах Ньюхауса δ_j*:

1) *плотны значения μ, при которых диффеоморфизм f_μ имеет периодическую траекторию с мультипликатором $+1$*;
2) *плотны значения μ, при которых диффеоморфизм f_μ имеет периодическую траекторию с мультипликатором -1;*

[1] Аналогичная ситуация имеет место и в случае седла, но для двухобходных периодических траекторий. Здесь любое изменения Ω-модуля $\theta = -\ln|\lambda|/\ln|\gamma|$ ведет к бифуркациям таких траекторий [12, 13]. Отметим также, что трехобходные периодические траекторий в этом случае могут к тому же претерпевать так называемые касп-бифуркации [16], когда в критический момент один из мультипликаторов равен $+1$ и равна нулю первая ляпуновская величина.

[2] В [7] вместо условия **B** мы требовали только, чтобы $\lambda\gamma \neq 1$. Заметим, что наше условие **B** включает это требование.

3) *плотны (и образуют множество второй категории) значения μ, при которых диффеоморфизм f_μ имеет счётное множество устойчивых периодических траекторий.*

По существу, пункты 1) и 2) этой теоремы есть в [1] для случая седла и в [2, 3] для случая седло-фокуса. Пункт 3) в двумерном случае известен начиная с работы [24], трёхмерный случай рассмотрен в [11, 23] (см. также [26]). Для полноты, мы приводим доказательство теоремы 1.1 совместно с доказательством остальных результатов, приведённых ниже.

Далее мы рассматриваем случай $d_e \geqslant 2$. Здесь основное внимание уделяется тем свойствам диффеоморфизмов f_ε, которые являются новыми по сравнению со случаем седла. Это:

1) существование негрубых периодических траекторий, имеющих более чем один мультипликатор на единичной окружности (теорема 1.2);
2) существование счетного множества устойчивых замкнутых инвариантных кривых (теорема 1.3);
3) сосуществование счетного множества грубых периодических траекторий более чем двух разных типов (теорема 1.4).

Теорема 1.2. *В случае $d_e = 2$, т.е. в случаях седло-фокуса $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2 < 1$, седло-фокуса $(1,2)$, а также седло-фокуса $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| > 1$, в областях Ньюхауса δ_j плотны значения параметров ε такие, что соответствующий диффеоморфизм f_ε имеет периодическую траекторию с любыми двумя наперед заданными мультипликаторами на единичной окружности.*

В случае седло-фокуса $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2 > 1$ (т.е. когда $d_e = 3$) в областях Ньюхауса δ_j плотны значения параметров ε такие, что соответствующий диффеоморфизм f_ε имеет периодическую траекторию с любыми тремя наперед заданными мультипликаторами на единичной окружности.

Уточним, что поскольку мы рассматриваем вещественные диффеоморфизмы, то речь в теореме 1.2 идёт о таких наборах мультипликаторов, куда каждый комплексный мультипликатор входит вместе со своим сопряжённым. В частности, мы получаем, что в случае гомоклинического касания к седло-фокусу при $d_e \geqslant 2$ в областях Ньюхауса плотны диффеоморфизмы с периодическими траекториями, имеющими мультипликаторы $e^{\pm i\omega}$, где $0 < \omega < \pi$. Анализ бифуркаций этих траекторий, а также периодических траекторий с мультипликаторами $(-1, -1)$ позволяет установить следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть C^r-гладкий ($r \geqslant 5$) диффеоморфизм f удовлетворяет условиям **A**–**D**. Тогда в случае $d_e \geqslant 2$ в областях Ньюхауса δ_j плотны и образуют множество второй категории значения параметров, при которых диффеоморфизм f_ε имеет счетное множество устойчивых замкнутых инвариантных кривых.*

В этой теореме существенно условие $J < 1$ (при $J > 1$ все траектории обязательно неустойчивы). В классе двумерных диффеоморфизмов с $J \neq 1$ замкнутых инвариантных кривых вблизи гомоклинического касания быть не может, поскольку мы имеем либо сжатие площадей (при $J < 1$), либо растяжение (при $J > 1$). Однако в случае коразмерности два, когда $J = 1$ в момент гомоклинического касания, уже и для диффеоморфизмов плоскости может наблюдаться рождение замкнутых инвариантных кривых [5, 20]. Замкнутые инвариантые кривые рождаются также при бифуркациях негрубого гетероклинического контура с двумя сёдлами, такого что в одном седле $J < 1$, а в другом $J > 1$. Вблизи систем с таким контуром, как показано в [9, 21], существуют области Ньюхауса, в которых плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счетное множество устойчивых и счетное множество вполне неустойчивых замкнутых инвариантных кривых.

Следующая теорема дает ответ на один из основных вопросов о динамике систем из областей Ньюхауса — о сосуществовании грубых периодических траекторий различных типов.

Теорема 1.4. *В областях Ньюхауса δ_j плотны и образуют множество второй категории значения параметров, при которых диффеоморфизмы f_ε имеют счетное множество устойчивых периодических траекторий и счетное множество седловых периодических траекторий с размерностями неустойчивых многообразий от 1 до d_e включительно.*

Заметим, что периодических траекторий с неустойчивыми многообразиями размерности больше d_e здесь быть не может в силу сжатия (d_e+1)-мерных объёмов [8,32]. Таким образом, например, в случае седло-фокуса (2,2) с $\lambda\gamma^2<1$, мы имеем сёдла с одномерными и двумерными неустойчивыми многообразиями, а седёл с трёхмерными неустойчивыми многообразиями нет. В то же время, при $\lambda\gamma^2>1$, $\lambda\gamma<1$, мы имеем здесь одновременно сёдла с одномерными, двумерными и трёхмерными неустойчивыми многообразиями.

Доказательство теорем 1.1–1.3 основано на исследовании отображений первого возвращения вблизи траектории гомоклинического касания. Мы сводим изучение этих отображений к анализу следующих стандартных квадратичных отображений:

(i) отображение параболы — $\bar y = M - y^2$ (для случаев седла и седло-фокуса $(2,1)$ при $|\lambda\gamma|<1$);
(ii) отображение Эно — $\bar x_1 = y$, $\bar y = M - y^2 + Bx_1$ (для случая седло-фокуса $(2,1)$ при $|\lambda\gamma|>1$);
(iii) отображение Мира — $\bar y_1 = y_2$, $\bar y_2 = M + Cy_2 - y_1^2$ (для случаев седло-фокуса $(1,2)$, а также седло-фокуса $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2<1$);
(iv) трехмерное отображение Эно — $\bar x_1 = y_1$, $\bar y_1 = y_2$, $\bar y_2 = M + Cy_2 + Bx_1 - y_1^2$ (для случая седло-фокуса $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2>1$).

Линейный анализ неподвижных точек этих отображений сравнительно несложен (см. раздел 4), но дает нам ту информацию, которая необходима для доказательства теорем 1.1, 1.2 и 1.4. Что касается устойчивых замкнутых инвариантных кривых (и, собственно, теоремы 1.3), то мы выводим их существование в случае седло-фокусов $(1,2)$ и $(2,2)$ из нелинейного бифуркационного анализа отображений (iii) и (iv). В случае седло-фокуса $(2,1)$ с $|\lambda\gamma|>1$ отображение Эно (ii) само по себе не имеет (асимптотически устойчивых) инвариантных замкнутых кривых. Поэтому для доказательства теоремы 1.3 в этом случае нам приходится иметь дело с так называемым обобщенным отображением Эно (см. лемма 1.2).

1.4. Лемма о рескейлинге. В случае диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с гомоклиническим касанием, отображения первого возвращения из малой фиксированной окрестности Π^+ гомоклинической точки M^+ записываются в виде суперпозиций $T_k = T_1 T_0^k$, где $k=\bar k$, $\bar k+1$, …, и $\bar k$ может быть достаточно большим. Напомним, что $T_0 = f_\varepsilon\big|_{U_0}$, где U_0 — некоторая малая окрестность неподвижной точки, а $T_1 \equiv f_\varepsilon^{k_0}$ — отображение, определенное в малой окрестности Π^- гомоклинической точки M^- и отображающее Π^- внутрь Π^+. Поэтому область определения отображения T_k на Π^+ — это «полоска» $\sigma_k^0 = \Pi^+ \cap T_0^{-k}\Pi^-$. Области определения σ_k^0 непусты для всех достаточно больших k (чем меньше размеры окрестностей Π^+ или Π^-, тем большим будет минимальное k), и они накапливаются к $W^s_{\mathrm{loc}} \cap \Pi^+$ при $k\to+\infty$.

Следующая лемма (основной технический результат нашей статьи) показывает, что при достаточно больших k отображения первого возвращения T_k могут быть представлены в некоторой стандартной форме: как отображения, асимптотически близкие при $k\to\infty$ к некоторым одномерным, двумерным или трехмерным квадратичным отображениям.

Лемма 1.1 (лемма о рескейлинге). *Пусть f_0 — C^r-гладкий ($r\geqslant 5$) диффеоморфизм, удовлетворяющий условиям* ***A*–*D***, *и пусть f_ε — d_e-параметрическое семейство, трансверсальное к $\mathcal{H}$ при $\varepsilon=0$. Тогда в пространстве параметров существует счетная последовательность областей Δ_k, накапливающихся к $\varepsilon=0$, такая, что справедливы следующие утверждения.*

При $\varepsilon\in\Delta_k$ существует такое преобразование координат на σ_k^0 и параметров на Δ_k, C^{r-1}-гладкое по координатам и C^{r-2}-гладкое по параметрам, в результате которого отображение первого возвращения $T_k:(x,y)\mapsto(\bar x,\bar y)$ приводится к одному из следующих видов:

(i) *в случае $(1,1)$, а также в случае $(2,1)$ при $\lambda\gamma<1$*
$$\bar y = M - y^2 + o(1), \quad \bar x = o(1); \tag{1.2}$$
(ii) *в случае $(2,1)$ при $\lambda\gamma>1$*
$$\bar x_1 = y, \qquad \bar y = M - y^2 + Bx_1 + o(1), \qquad \bar x_2 = o(1); \tag{1.3}$$
(iii) *в случае $(1,2)$, а также в случае $(2,2)$ при $\lambda\gamma^2<1$*
$$\bar y_1 = y_2, \qquad \bar y_2 = M + Cy_2 - y_1^2 + o(1), \qquad \bar x = o(1); \tag{1.4}$$

(iv) *в случае* $(2,2)$ *при* $\lambda\gamma^2 > 1$

$$\bar{x}_1 = y_1, \qquad \bar{y}_1 = y_2, \qquad \bar{y}_2 = M + Cy_2 + Bx_1 - y_1^2 + o(1), \qquad \bar{x}_2 = o(1). \tag{1.5}$$

При этом область определения отображения T_k *асимптотически большая и в пределе* $k \to +\infty$ *покрывает все конечные значения координат* (x, y).

Нормированные параметры M, B *и* C *связаны с исходными параметрами* μ, φ *и* ψ *следующим образом:*

$$\begin{aligned} M &= M_0\gamma^{2nk}(\mu + O(|\lambda|^k + |\gamma|^{-k})), \\ B &= B_0\,(\lambda\gamma^n)^k \cos(k\varphi + \alpha_k(\varepsilon)), \\ C &= C_0\gamma^k \cos(k\psi + \beta_k(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $n = \dim W^u(O)$, *константы* M_0, B_0, C_0 *отличны от нуля и функции* α_k *и* β_k *равномерно ограничены по* k *вместе с производными. При этом, когда* ε *пробегает область* Δ_k, *значения параметров* M, B *и* C *пробегают, в свою очередь, асимптотически большие области, покрывающие в пределе* $k \to +\infty$ *все конечные значения.*

Здесь через $o(1)$ обозначены некоторые функции (от координат и параметров M, B, C), которые стремятся к нулю при $k \to \infty$ вместе со всеми производными до порядка $(r-2)$ включительно, а по параметрам — до порядка $(r-3)$, равномерно на любом ограниченном множестве из пространства (x, y, M, B, C). Заметим также, что в случае седло-фокусов области Δ_k, отвечающие конечным значениям B и C, могут состоять из нескольких компонент связности (в силу периодичности коэффициентов B и C по φ и ψ соответственно).

В случае (ii) леммы 1.1 нам понадобится более аккуратный учет асимптотически малых членов в отображении (1.3), что приводит нас к следующему результату.

Лемма 1.2. *В случае* $(2,1)$ *при* $\lambda\gamma > 1$, *когда* $\varepsilon = (\mu, \varphi - \varphi_0) \in \Delta_k$ *и соответствующее значение параметра* B *отделено от нуля, отображение* T_k *в форме* (1.3) *имеет двумерное притягивающее инвариантное* C^{r-2}*-гладкое многообразие* $\mathcal{M}_k^s \subset \sigma_k^0$ *вида* $x_2 = o(1)$ *при* $k \to \infty$ *такое, что отображение* $T_k\Big|_{\mathcal{M}_k^s}$ *имеет следующий вид*:

$$\bar{x}_1 = y, \qquad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + \frac{2J_1}{B}(\lambda^2\gamma)^k\,(x_1 y + o(1))\,, \tag{1.7}$$

где $J_1 \neq 0$ — *некоторая константа* (*точнее,* J_1 — *это якобиан глобального отображения* T_1, *вычисленный в гомоклинической точке* M^- *при* $\varepsilon = 0$).

Отображение (1.7) называется обобщенным отображением Эно. Оно было введено в [5, 20], где было, в частности, показано, что это отображение демонстрирует невырожденную бифуркацию Андронова—Хопфа и имеет устойчивую замкнутую инвариантную кривую для значений параметров (M, B) из некоторых открытых областей (см. раздел 4).

Содержание статьи. В разделе 2 изучаются свойства локального $T_0(\varepsilon)$ и глобального $T_1(\varepsilon)$ отображений. В разделе 3 изучаются отображения первого возвращения и доказываются леммы 1.1 и 1.2. В разделе 4 проводится анализ отображений (1.2)–(1.5) и (1.7) и доказываются теоремы 1.1–1.4.

2. Свойства локального и глобального отображений

Для того, чтобы изучить отображения первого возвращения $T_k = T_1 T_0^k$ при всех достаточно больших k и всех достаточно малых ε, нам потребуются подходящие формулы для отображений T_0 и T_1. При этом особые требования, естественно, предъявляются к форме локального отображения $T_0(\varepsilon)$. Это отображение имеет при всех достаточно малых значениях параметров неподвижную точку O_ε, которую будем полагать находящейся в начале координат. Выделив линейную часть и выбрав соответствующим образом координатные оси, можно представить $T_0(\varepsilon)$ в виде (1.1).

Кроме того, с помощью C^r-гладкой замены координат можно распрямить локальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки O_ε. Тем самым, T_0 приводится к виду

$$\bar{x} = A(\varepsilon)x + p(x, y, \varepsilon), \qquad \bar{y} = B(\varepsilon)y + q(x, y, \varepsilon), \tag{2.1}$$

где функции p и q — C^r-гладкие и обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными; кроме того, $p(0, y, \varepsilon) \equiv 0$, $q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0$. В этом случае $W^s_{\text{loc}} = \{y = 0, v = 0\}$, $W^u_{\text{loc}} = \{x = 0, y = 0\}$. Заметим, что одного только распрямления многообразий W^s_{loc} и W^u_{loc} для наших целей недостаточно. По существу, это связано с тем, что в правых частях отображения (2.1) содержится слишком много нерезонансных членов. Тем не менее, с помощью дополнительных замен координат определённую часть этих членов можно убить. Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $r \geqslant 3$. При всех достаточно малых ε на U_0 можно ввести такие C^{r-1}-координаты (x, u, y, v) класса C^{r-2} по параметрам, в которых отображение $T_0(\varepsilon)$ записывается в следующем виде*:

$$\bar{x} = A(\varepsilon)x + P(x, y, \varepsilon)x, \qquad \bar{y} = B(\varepsilon)y + Q(x, y, \varepsilon)y, \tag{2.2}$$

где

$$P(0, y, \varepsilon) = P(x, 0, \varepsilon) \equiv 0, \qquad Q(x, 0, \varepsilon) = Q(0, y, \varepsilon) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Одним из решающих достоинств формы (2.2) является то, что в этом случае отображение $T_0^k : U_0 \to U_0$, представленное в так называемом «перекрестном виде», будет в главном порядке линейным при всех достаточно больших k. Именно, пусть $T_0(\varepsilon)$ приведено к виду (2.2) и пусть (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, k$, — точки на U_0 такие, что $(x_i, y_i) = T_0(x_{i-1}, y_{i-1})$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. *Отображение $T_0^k(\varepsilon) : (x_0, y_0) \to (x_k, y_k)$ для любого достаточно большого k и при всех достаточно малых ε может быть представлено в виде*

$$x_k - A_1^k(\varepsilon)x_0 = \hat{\lambda}^k \xi_k(x_0, y_k, \varepsilon), \qquad y_0 - B_1^{-k}(\varepsilon)y_k = \hat{\gamma}^{-k}\eta_k(x_0, y_k, \varepsilon), \tag{2.4}$$

где $\hat{\lambda}$ и $\hat{\gamma}$ — некоторые константы такие, что $0 < \hat{\lambda} < |\lambda|$, $\hat{\gamma} > |\gamma|$; функции ξ_k и η_k равномерно ограничены по k вместе с производными (*в том числе и по параметрам*) *до порядка* $(r - 2)$.

Доказательство лемм 2.1 и 2.2 для разных случаев имеется в [13, 14, 29].

Что касается глобального отображения $T_1(\varepsilon)$, то, используя условия **C** и **D** квадратичности гомоклинического касания, мы также найдем его удобное представление. Напомним, что условие трансверсальности семейства f_ε к бифуркационной поверхности H означает, что среди параметров ε можно выделить параметр расщепления μ инвариантных многообразий точки O вблизи выбранной гомоклинической точки M^+. В этом случае глобальное отображение $T_1(\varepsilon)$ может быть представлено в виде, о котором идет речь в следующей лемме.

Лемма 2.3. *Координаты, определённые в лемме 2.1, можно ввести в U_0 таким образом, что при всех достаточно малых ε глобальное отображение $T_1(\varepsilon)$ может быть записано в следующем виде*:

— *в случае* $(1, 1)$ (*здесь $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$*)

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b_0(y - y^-) + \ldots, \\ \bar{y} &= \mu + cx + D_0(y - y^-)^2 + \ldots; \end{aligned} \tag{2.5}$$

— *в случае* $(2, 1)$ (*здесь $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$*)

$$\begin{aligned} &\bar{x} - x^+ = ax + \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix}(y - y^-) + \ldots, \\ &\bar{y} = \mu + c_1x_1 + c_2x_2 + D_0(y - y^-)^2 + \ldots; \end{aligned} \tag{2.6}$$

— *в случае* $(1,2)$ (*здесь* $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} &\bar{x} - x^+ = ax + b_0(y_1 - y_1^-) + b_1\bar{y}_2 + \ldots, \\ &\bar{y}_1 = \mu + cx + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \ldots, \\ &y_2 - y_2^- = d_1(y_1 - y_1^-) + d_2\bar{y}_2 + ex + \ldots; \end{aligned} \tag{2.7}$$

— *в случае* $(2,2)$ (*здесь* $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} &\bar{x} - x^+ = ax + \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix}(y_1 - y_1^-) + b_1\bar{y}_2 + \ldots, \\ &\bar{y}_1 = \mu + c_1x_1 + c_2x_2 + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \ldots, \\ &y_2 - y_2^- = d_1(y_1 - y_1^-) + d_2\bar{y}_2 + e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $b_0 \neq 0$, $c \neq 0$, $D_0 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $x^+ \neq 0$, $y^- \neq 0$.

Заметим, что в формулах (2.7) и (2.8) глобальное отображение T_1 представлено в перекрестном виде по координате y_2, то есть правые части являются функциями от (x, y_1) и $\bar{y}_2$.

По существу, формулы (2.5)–(2.8) представляют собой тейлоровские разложения для подходящим образом выбранного $y^-(\varepsilon)$; многоточиями обозначены нелинейные члены (кроме одного квадратичного члена, выписанного явно). Отметим также, что коэффициенты $a, \ldots, e_2$, так же как и x^+ и y^-, а также члены, обозначенные многоточиями, зависят, вообще говоря, от параметров ε (где всегда $\varepsilon_1 = \mu$). Соответствующий класс гладкости по ε здесь C^{r-3}: в координатах леммы 2.1 отображение T_1, вместе со своей первой производной по (x,y), является C^{r-2}-гладким по ε (см. [29]), поэтому коэффициент $D_0(\varepsilon)$ перед квадратичным членом C^{r-3}-гладкий.

Доказательство леммы 2.3. Будем использовать на U_0 координаты леммы 2.1.

Пусть гомоклинические точки $M^+ \in W^s_{\mathrm{loc}}$ и $M^- \in W^u_{\mathrm{loc}}$ имеют координаты $M^+ = M^+(x^+, 0)$ и $M^- = M^-(0, y^-)$, где $\|x^+\| \neq 0$, $\|y^-\| \neq 0$. Так как $T_1M^- = M^+$ при $\varepsilon = 0$, то при достаточно малых ε отображение $T_1(\varepsilon)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\bar{x} - x^+(\varepsilon) = \hat{a}x + \hat{b}(y - y^-(\varepsilon)) + \cdots, \\ &\bar{y} = y^+(\varepsilon) + \hat{c}x + \hat{d}(y - y^-(\varepsilon)) + \cdots \end{aligned} \tag{2.9}$$

где многоточиями обозначены члены не менее второго порядка малости, все коэффициенты, вообще говоря, зависят от ε, и $y^+(0) = 0$. Кроме того,

$$\det\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.10}$$

Найдем соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты в (2.9) в силу условий **C** и **D**. Рассмотрим условие **C**. Оно означает, что при $\varepsilon = 0$ поверхность $T_1W^u_{\mathrm{loc}}$ имеет в точке M^+ *ровно один* касательный вектор к плоскости W^s_{loc}. Так как W^u_{loc} имеет уравнение $x = 0$, а W^s_{loc} — уравнение $\bar{y} = 0$, из (2.9) вытекает, что пересечение касательных плоскостей к $T_1W^u_{\mathrm{loc}}$ и W^s_{loc} в точке M^+ будет одномерным в том и только том случае, когда система $\hat{d}(y - y^-) = 0$ имеет однопараметрическое семейство решений при $\varepsilon = 0$. Таким образом, в случае, когда $y \in \mathbb{R}^1$ и $\hat{d}$ — скаляр (т.е. в случаях $(1,1)$ и $(2,1)$), мы имеем

$$\hat{d} = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0. \tag{2.11}$$

Если же $y \in \mathbb{R}^2$ (случаи $(1,2)$ и $(2,2)$), то $\hat{d}$ — (2×2)-матрица, и

$$\det\hat{d} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rank}\hat{d} = 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0. \tag{2.12}$$

В случае, когда $y \in \mathbb{R}^1$, второе уравнение (2.9) может быть записано в виде

$$\bar{y} = \hat{y}^+(\varepsilon) + \hat{c}x + D_0(y - y^-)^2 + \ldots, \tag{2.13}$$

где явно выписано несколько первых членов тейлоровского разложения, включая линейные и один второго порядка. Условие **D** квадратичности гомоклинического касания означает, что $D_0 \neq 0$.

Заметим, что правая часть уравнения (2.13) не содержит линейного по $(y-y^-)$ члена — этого всегда можно добиться при всех достаточно малых ε, полагая, что y^- зависит определенным образом от ε.

В конечном счете, в случае $(1,1)$ мы приходим к формуле (2.5) для отображения T_1, где $b_0=\hat{b}$, $c=\hat{c}$ и $b_0c\neq 0$ в силу (2.10) и (2.12). Отметим также, что в (2.5) мы положили $\mu=\hat{y}^+(\varepsilon)$, подчеркивая тот факт, что $\hat{y}^+(\varepsilon)$ есть параметр расщепления многообразий $W^s(O)$ и $W^u(O)$ вблизи гомоклинической точки M^+.

В случае $(2,1)$, чтобы получить формулу (2.6), мы сделаем еще одно преобразование координат, именно линейный поворот в x-плоскости, с тем, чтобы преобразовать вектор $b=(\hat{b}_1,\hat{b}_2)$ в $(b_0,0)$, где $b_0=\sqrt{\hat{b}_1^2+\hat{b}_2^2}\neq 0$. Легко видеть, что этого можно добиться с помощью поворота $x\mapsto R_\omega x$, где $\omega=\operatorname{arctg}(-\hat{b}_2/\hat{b}_1)$. При этом, заметим, что

$$c_1=\frac{\hat{b}_1\hat{c}_1-\hat{b}_2\hat{c}_2}{b_0},\quad c_2=\frac{\hat{b}_2\hat{c}_1+\hat{b}_1\hat{c}_2}{b_0},$$

и $c_1^2+c_2^2\neq 0$ в силу (2.10).

Рассмотрим теперь случаи, когда $y\in\mathbb{R}^2$ (т.е. случаи $(1,2)$ и $(2,2)$). Уравнения для $\bar{y}$ из (2.9) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1&=\hat{y}_1^+(\varepsilon)+\hat{c}_1x+\hat{d}_{11}(y_1-y_1^-)+\hat{d}_{12}(y_2-y_2^-)+\ldots,\\ \bar{y}_2&=\hat{y}_2^+(\varepsilon)+\hat{c}_2x+\hat{d}_{21}(y_1-y_1^-)+\hat{d}_{22}(y_2-y_2^-)+\ldots.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Заметим, что поворот координат в y-плоскости оставляет вид уравнения (2.14) в принципе таким же, но коэффициенты могут измениться. При $\varepsilon=0$, так как $\det\hat{d}=0$, мы можем повернуть y-координаты так, что будут выполнены равенства

$$\hat{d}_{11}=0,\quad \hat{d}_{12}=0.\tag{2.15}$$

Не ограничивая общности, мы полагаем сразу, что эти равенства имеют место при $\varepsilon=0$. Так как $\operatorname{rank}\hat{d}=1$ при $\varepsilon=0$, то хотя бы один из коэффициентов $\hat{d}_{21}$ или $\hat{d}_{22}$ ненулевой. Предположим, что

$$\hat{d}_{22}\neq 0.\tag{2.16}$$

Если это не так (т.е. $\hat{d}_{22}=0$ и, значит, $\hat{d}_{21}\neq 0$), то мы возьмем другую гомоклиническую точку, именно, точку $T_0^{-1}(M^-)$, и будем рассматривать ее как новую точку M^-. Для нового глобального отображения ($T_{1\,\mathrm{new}}=T_1T_0$) новая матрица $\hat{d}$ запишется как

$$\hat{d}_{\mathrm{new}}=\hat{d}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

В силу (2.15) получаем, что

$$\hat{d}_{\mathrm{new}}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \hat{d}_{21}\cos\varphi+\hat{d}_{22}\sin\varphi & -\hat{d}_{21}\sin\varphi+\hat{d}_{22}\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Тогда, если $\hat{d}_{22}=0$, то после перехода к новой гомоклинической точке мы действительно получим, что (2.16) выполнено (поскольку $\hat{d}_{21}\neq 0$ и $\sin\varphi>0$ так как $\varphi\in(0,\pi)$).

Учтем теперь и квадратичные члены, тогда уравнение для $\bar{y}_1$ из (2.14) при $\varepsilon=0$ запишется следующим образом:

$$\bar{y}_1=c_1x+D_1(y_1-y_1^-)^2+D_2(y_1-y_1^-)(y_2-y_2^-)+D_3(y_2-y_2^-)^2+\ldots.\tag{2.17}$$

Так как $\hat{d}_{22}\neq 0$, то второе уравнение из (2.14) может быть разрешено относительно $(y_2-y_2^-)$. Соответственно, при $\varepsilon=0$ имеем

$$y_2-y_2^-=d_1(y_1-y_1^-)+d_2\bar{y}_2+ex+\ldots,\tag{2.18}$$

где $d_1=-\hat{d}_{21}/\hat{d}_{22}$, $d_2=\hat{d}_{22}^{-1}$. Подставив (2.18) в (2.17), получим

$$\bar{y}_1=c_1x+D_0(y_1-y_1^-)^2+\tilde{D}_1(y_1-y_1^-)\bar{y}_2+\tilde{D}_2\bar{y}_2^2+\ldots,\tag{2.19}$$

где

$$D_0 \equiv D_1 + d_1 D_2 + d_1^2 D_3 \tag{2.20}$$

и $\tilde{D}_{1,2}$ — некоторые коэффициенты. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ отображение T_1 в перекрёстном виде записывается как

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b_0(y_1 - y_1^-) + b_1\bar{y}_2 + \ldots, \\ \bar{y}_1 &= cx + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \ldots, \\ y_2 - y_2^- &= d_1(y_1 - y_1^-) + d_2\bar{y}_2 + ex + \ldots \end{aligned} \tag{2.21}$$

в случае $(1,2)$ и

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 - x_1^+ &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_0(y_1 - y_1^-) + b_{11}\bar{y}_2 + \ldots, \\ \bar{x}_2 - x_2^+ &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{12}\bar{y}_2 + \ldots, \\ \bar{y}_1 &= c_1x_1 + c_2x_2 + D_0(y_1 - y_1^-)^2 + \ldots, \\ y_2 - y_2^- &= d_1(y_1 - y_1^-) + d_2\bar{y}_2 + e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.22}$$

в случае $(2,2)$ с некоторыми новыми коэффициентами a, b, c, d, e (в случае $(2,2)$ мы делаем коэффициент перед $(y_1 - y_1^-)$ в уравнении для $\bar{x}_2$ равным нулю при помощи подходящего поворота x-координат так же, как в случае $(2,1)$). Условие (2.10) переписывается при этом в виде

$$\det \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y}_1)}{\partial(x, y_1)} \neq 0, \tag{2.23}$$

что в обоих случаях даёт нам $b_0 \neq 0$, $c \neq 0$.

Так как $x = 0$ на W^u_{loc}, то, как следует из (2.21), (2.22), образ $T_1 W^u_{\mathrm{loc}}$ этой поверхности задаётся вблизи точки M^+ уравнением

$$y_1 = \frac{D_0}{b_0^2}(x - x^+)^2 + \ldots \tag{2.24}$$

в случае $(1,2)$, и уравнениями

$$x_2 - x_2^+ = b_{12}y_2 + \ldots, \qquad y_1 = \frac{D_0}{b_0^2}(x_1 - x_1^+)^2 + \ldots \tag{2.25}$$

в случае $(2,2)$. В любом случае, очевидно, что условие **D** квадратичности касания этой поверхности с W^s_{loc} $(y = 0)$ эквивалентно условию $D_0 \neq 0$.

При $\varepsilon \neq 0$ отображение T_1 по прежнему задаётся уравнениями (2.21) и (2.22): так как $D_0(\varepsilon) \neq 0$ при всех достаточно малых ε, то можно всегда так выбрать $y_1^-(\varepsilon)$ и $y_2^-(\varepsilon)$ и повернуть дополнительно y-координаты, что коэффициенты $d_{11}(\varepsilon)$ и $d_{12}(\varepsilon)$ будут тождественными нулями при всех достаточно малых ε. Единственным отличием по сравнению со случаем $\varepsilon = 0$ будет, таким образом появление ненулевого свободного члена $y_1^+(\varepsilon)$ в уравнении для $\bar{y}_1$. Как и выше, условие трансверсальности семейства f_ε бифуркационной поверхности $\mathcal{H}$ позволяет положить $y_1^+(\varepsilon) = \mu$. Это завершает доказательство леммы 2.3. $\square$

3. Доказательство лемм о рескейлинге

В этом разделе мы изучим отображения первого возвращения

$$T_k(\varepsilon) \equiv T_1 T_0^k : \sigma_k^0 \to \sigma_k^0$$

при всех достаточно больших k: $k = \bar{k}, \bar{k}+1, \ldots$, и малых ε, $\|\varepsilon\| \leqslant \varepsilon_0$. При этом для отображения $T_0^k : \sigma_k^0 \to \sigma_k^1$ мы используем формулу (2.4) из леммы 2.2, где $(x_0, y_0) \in \Pi^+, (x_k, y_k) \in \Pi^-$, а для глобального отображения $T_1(\varepsilon)$ — соответствующие формулы из леммы 2.3. Согласно лемме 2.2, для любых малых x_0, y_k и любого достаточно большого k соответствующие координаты x_k, y_0 определяются однозначно. Поэтому мы можем использовать (x_0, y_k) в качестве координат на σ_k^0; координата y_0 вычисляется по формуле

$$y_0 = B_1^{-k}(\varepsilon)y_k + \hat{\gamma}^{-k}\eta_k(x_0, y_k, \varepsilon)$$

(см. лемму 2.2). Заметим, что в координатах (x_0, y_k) размер полоски σ_k^0 по всем направлениям отделён от нуля для любого k. Так, если мы определим окрестности Π^+ и Π^- как

$$\{\|x - x^+\| \leqslant \rho_0, \|y\| \leqslant \rho_0\}, \qquad \{\|x\| \leqslant \rho_0, \|y - y^-\| \leqslant \rho_0\}$$

соответственно, где ρ_0 — некоторая малая положительная константа, то каждая полоска σ_k^0 определяется соотношением

$$\{\|x_0 - x^+\| \leqslant \rho_0,\ \|y_k - y^-\| \leqslant \rho_0\}.$$

3.1. Отображения первого возвращения в случае $(1,1)$**.** Здесь координаты x и y — одномерные, $A = \lambda$, $B = \gamma$. В силу (2.4) и (2.5) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$ при всех достаточно больших k и малых ε может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_0 - x^+(\varepsilon) = a\lambda^k x_0 + b_0(y_k - y^-) + O\left((y_k - y^-)^2 + |\lambda|^k|x_0||y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k|x_0|\right), \\ &\gamma^{-k}\bar{y}_k + \hat{\gamma}^{-k}O(|\bar{x}_0| + |\bar{y}_k|) = \mu + cx_0\lambda^k + D_0(y_k - y^-)^2 + \\ &\qquad + O\left((y_k - y^-)^3 + |\lambda|^k|x_0||y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k|x_0|\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $b_0 \neq 0$, $c \neq 0$, $D_0 \neq 0$. Заметим, что здесь и ниже мы выбираем $\hat{\lambda}$ достаточно близким к $|\lambda|$ (но всегда меньше, чем $|\lambda|$), так что $\hat{\lambda} > \lambda^2$, в частности.

Сдвинем начало координат:

$$x = x_0 - x^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, \qquad y = y_k - y^- + \tilde{\nu}_k^2$$

таким образом, чтобы первое уравнение из (3.1) не содержало бы свободных членов, т.е. членов, зависящих только от ε, а второе — линейного члена по y. Это всегда можно сделать для подходящим образом выбранных $\tilde{\nu}_k^j = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$. В результате система (3.1) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\bar{x} = O(|\lambda|^k|x| + |y|), \\ &\bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(|\bar{x}| + |\bar{y}|) = \gamma^k M_1 + \tilde{D}_0\gamma^k y^2 + \gamma^k O(|y|^3 + |\lambda|^k|x|), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$M_1 \equiv \mu - \gamma_1^{-k}y^-(1 + \dots) + c\lambda_1^k x^+(1 + \dots)$$

и $\tilde{D}_0 = D_0(1 + \beta_k)$, где $\beta_k = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$ — некоторая малая величина.

Теперь нормируем координаты следующим образом:

$$x = -\frac{\gamma^{-k}}{\rho^k}x_{\text{new}}, \qquad y = -\frac{1}{\tilde{D}_0}\gamma^{-k}y_{\text{new}}, \tag{3.3}$$

где ρ — некоторое число из интервала

$$\max\left\{|\lambda\gamma|, |\gamma|^{-1}\right\} < \rho < 1. \tag{3.4}$$

Поскольку $|\lambda\gamma| < 1$ и $|\gamma| > 1$, то такие ρ действительно существуют, и при этом нормировочные множители в (3.3) будут асимптотически малы при $k \to \infty$. Следовательно, поскольку размер полоски σ_k^0 в координатах (x_0, y_k) отделён от нуля, то область изменения нормированных координат (x, y) становится неограниченно большой с ростом k.

В новых координатах система (3.2) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\bar{x} = O(\rho^k|y| + |\lambda|^k|x|), \\ &\bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\rho^{-k}|\bar{x}| + |\bar{y}|) = -\tilde{D}_0\gamma^{2k}M_1 - y^2 + O\left(|\gamma|^{-k}|y|^3 + \frac{|\lambda\gamma|^k}{\rho^k}|x|\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь, в силу (3.4), учитывая, что $|\lambda\gamma| < 1$, $\hat{\lambda} < |\lambda|$, система (3.5) приводится к искомому виду (1.2), где мы полагаем

$$M = -\tilde{D}_0\gamma_1^{2k}[\mu - \gamma_1^{-k}y^-(1 + \dots) + c\lambda_1^k x^+(1 + \dots)]. \tag{3.6}$$

Заметим, что параметр M, так же как и координаты (x, y), может принимать произвольные конечные значения при больших k.

3.2. Отображения первого возвращения в случае $(2,1)$**.** Здесь $x=(x_1,x_2)$ двумерно, y одномерно и

$$A \equiv \lambda \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad B \equiv \gamma.$$

В силу (2.4) и (2.6) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$, при каждом достаточно большом k и всех малых ε, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_{01} - x_1^+(\varepsilon) = \lambda^k A_{11}(k\varphi) x_{01} + \lambda^k A_{12}(k\varphi) x_{02} + b_0(y_k - y^-) \\
&\qquad + O\left((y_k - y^-)^2 + \lambda^k \|x_0\| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k \|x_0\|\right), \\
&\bar{x}_{02} - x_2^+(\varepsilon) = \lambda^k A_{21}(k\varphi) x_{01} + \lambda^k A_{22}(k\varphi) x_{02} \\
&\qquad + O\left((y_k - y^-)^2 + \lambda^k \|x_0\| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k \|x_0\|\right), \\
&\gamma^{-k} \bar{y}_k + \hat{\gamma}^{-k} \eta_k(\bar{x}_0, \bar{y}_k, \varepsilon) = \mu + D_0 (y_k - y^-)^2 \\
&\qquad + \lambda^k \left[x_{01}(c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi) x_{01} + (c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi) x_{02}\right] \\
&\qquad + O\left((y_k - y^-)^3 + \lambda^k \|x_0\| |y_k - y^-| + \hat{\lambda}^k \|x_0\|\right),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11}(k\varphi) &= a_{11} \cos k\varphi - a_{12} \sin k\varphi, \qquad & A_{12}(k\varphi) &= a_{12} \cos k\varphi + a_{11} \sin k\varphi, \\
A_{21}(k\varphi) &= a_{21} \cos k\varphi + a_{22} \sin k\varphi, \qquad & A_{22}(k\varphi) &= a_{22} \cos k\varphi - a_{21} \sin k\varphi.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Сдвинем начало координат,

$$x_1 = x_{01} - x_1^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, \qquad x_2 = x_{02} - x_2^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^2, \qquad y = y_k - y^-(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^3$$

таким образом, чтобы первое и второе уравнения из (3.7) не содержали свободных членов, а третье — линейного по y члена (здесь $\tilde{\nu}_k^i = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$). При этом мы еще заменяем $\bar{x}_{01}$ и $\bar{x}_{02}$ в не зависящих от $\bar{y}$ членах в левой части третьего уравнения из (3.7) на их выражения из первого и второго уравнений. Тогда (3.7) перепишется как

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = \lambda^k A_{11}(k\varphi) x_1 + \lambda^k A_{12}(k\varphi) x_2 + b_0 y + O(y^2 + \lambda^k |y| + \hat{\lambda}^k \|x\|), \\
&\bar{x}_2 = \lambda^k A_{21}(k\varphi) x_1 + \lambda^k A_{22}(k\varphi) x_2 + O(y^2 + \lambda^k |y| + \hat{\lambda}^k \|x\|), \\
&\bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(|\bar{y}|) = \gamma^k M_1 + \tilde{D}_0 \gamma^k y^2 + \lambda^k \gamma^k \Big[(c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi) x_1 \\
&\qquad + (c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi) x_2 + \left((\hat{\lambda}/\lambda)^k + \hat{\gamma}^{-k}\right) O(\|x\|)\Big] + \gamma^k O\left(|y|^3 + \lambda^k \|x\| |y|\right),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$M_1 \equiv \mu - \gamma^{-k} y^- (1 + \ldots) + C_0 \lambda^k \left(\cos(k\varphi + \vartheta_1) + \ldots\right)$$

и

$$C_0 = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)({x_1^+}^2 + {x_2^+}^2)}, \qquad \sin\vartheta_1 = \frac{c_1 x_2^+ - c_2 x_1^+}{C_0}, \qquad \cos\vartheta_1 = \frac{c_1 x_1^+ + c_2 x_2^+}{C_0}, \tag{3.10}$$

$\tilde{D}_0 = D_0(1 + \beta_k)$ и $\beta_k = O(\lambda^k + \hat{\gamma}^{-k})$ — некоторый малый коэффициент.

Рассмотрим случай $|\lambda\gamma| < 1$. Нормируем, так же как и в случае $(1,1)$, координаты следующим образом:

$$x = \frac{\gamma^{-k}}{\rho^k} x_{\text{new}}, \qquad y = -\tilde{D}_0^{-1} \gamma^{-k} y_{\text{new}},$$

где ρ — некоторое число из интервала (3.4). В новых координатах система (3.9) примет вид

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = \rho^k O(y) + \lambda^k O(x), \qquad \bar{x}_2 = \rho^k \gamma^{-k} O(y^2) + \lambda^k O(x), \\
&\bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\bar{y}) = M - y^2 + \frac{\lambda^k \gamma^k}{\rho^k} O(x) + |\gamma|^{-k} O(y^3),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$M \equiv -\tilde{D}_0 \gamma^{2k} \left[\mu - \gamma^{-k} y^- (1 + \ldots) + \lambda^k (C_0 \cos(k\varphi + \vartheta_1) + \ldots)\right]. \tag{3.12}$$

Таким образом, в силу (3.4), после разрешения последнего уравнения относительно $\bar{y}$ отображение (3.11) приводится к искомому виду (1.2).

Рассмотрим теперь случай $|\lambda\gamma| > 1$ (но, как и прежде, здесь $|\lambda^2\gamma| < 1$). Нормируем координаты в (3.9) следующим образом:

$$x_1 = -(b_0\tilde{D}_0^{-1})\gamma^{-k}x_{1\,\mathrm{new}}, \qquad x_2 = -\rho^k(b_0\tilde{D}_0^{-1})\gamma^{-k}x_{2\,\mathrm{new}}, \qquad y = -\tilde{D}_0^{-1}\gamma^{-k}y_{\mathrm{new}},$$

где ρ — некоторая константа из интервала

$$|\gamma|^{-1} < \lambda < \rho < |\lambda\gamma|^{-1}, \tag{3.13}$$

который непуст, так как $1 > \dfrac{1}{|\lambda\gamma|} = \dfrac{\lambda}{|\lambda^2\gamma|} > \lambda$ в силу $|\lambda^2\gamma| < 1$.

В новых координатах система (3.9) примет вид

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = y + \lambda^k O(\|x\| + |y|),\\
&\bar{x}_2 = \rho^{-k}\lambda^k A_{21}(k\varphi)x_1 + \lambda^k A_{22}(k\varphi)x_2 + \rho^{-k}\lambda^k O(y) + \rho^{-k}\hat{\lambda}^k O(x),\\
&\bar{y} + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\bar{y}) = M - y^2 + \lambda^k\gamma^k b_0\Big\{(c_1\cos k\varphi + c_2\sin k\varphi + \nu_k^1)x_1 +\\
&\quad + \rho^k(c_2\cos k\varphi - c_1\cos k\varphi + \nu_k^2)x_2\Big\} + O\left(|\gamma|^{-k}|y|^3 + \lambda^k\|x\||y| + (\hat{\lambda}^k + \lambda^k\hat{\gamma}^{-k})\|x\|^2\right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где для параметра M по-прежнему имеет место формула (3.12), а ν_k^1, ν_k^2 — некоторые малые коэффициенты, $\nu_k^{1,2} = O\left((\hat{\lambda}/\lambda)^k + \hat{\gamma}^{-k}\right)$. Третье уравнение в (3.14) разрешим относительно $\bar{y}$ и снова нормируем координату y: $y_{\mathrm{new}} = y(1 + \hat{\beta}_k)$, где $\hat{\beta}_k = O\left((\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}\right)$ — некоторая малая величина. Тогда (3.14) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = y + \lambda^k O(\|x\| + |y|),\\
&\bar{x}_2 = \rho^{-k}\lambda^k A_{21}(k\varphi)x_1 + \lambda^k A_{22}(k\varphi)x_2 + \rho^{-k}\lambda^k O(|y|) + \rho^{-k}\hat{\lambda}^k O(\|x\|),\\
&\bar{y} = M - y^2 + \lambda^k\gamma^k b_0\Big\{(c_1\cos k\varphi + c_2\sin k\varphi + \nu_k^1)x_1 +\\
&\quad + \rho^k(c_2\cos k\varphi - c_1\cos k\varphi + \nu_k^2)x_2\Big\} + O\left(|\gamma|^{-k}|y|^3 + \lambda^k\|x\||y| + \hat{\lambda}^k\|x\|^2\right),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где новые коэффициенты M и $\nu_k^{1,2}$ отличаются от старых на малые величины порядка $O\left((\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}\right)$; коэффициент b_0 остаётся неизменным.

Заметим, что поскольку $|\lambda\gamma| > 1$, то коэффициент

$$B_k(\varphi) \equiv b_0\lambda^k\gamma^k(c_1\cos k\varphi + c_2\sin k\varphi + \nu_k^1) \tag{3.16}$$

из третьего уравнения в (3.15) уже не мал. Тем не менее, $B_k(\varphi)$ может принимать произвольные конечные значения (при всех больших k), если параметр φ будет варьироваться вблизи тех значений, где $c_1\cos k\varphi + c_2\sin k\varphi = 0$, т.е. вблизи значений

$$\varphi = \frac{\vartheta_2}{k} \pm \frac{\pi}{2k} + 2\pi\frac{j}{k}, \qquad j \in Z, \tag{3.17}$$

где $\vartheta_2 \in [0, 2\pi)$ таково, что

$$\cos\vartheta_2 = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \sin\vartheta_2 = c_2/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Так как $c \neq 0$ (по лемме 2.3), то значения (3.17) угла φ плотно заполняют, при всевозможных k и j, интервал $(0, \pi)$.

Обозначим $B = B_k(\varphi)$, подчеркивая, тем самым, что B является еще одним управляющим параметром помимо M. Заметим, что параметр M (см. формулу (3.12)) может также принимать произвольные конечные значения, когда μ варьируется вблизи значения $\mu_k^0 = \gamma_1^{-k}y^- - C_0\lambda^k\cos(k\varphi_0 + \vartheta_1)$.

Введем новую координату $y_{\mathrm{new}} = y + \lambda^k O(\|x\| + |y|)$ так, чтобы в новых координатах было $\bar{x}_1 = y$. Тогда, в силу (3.13), отображение (3.15) принимает искомый вид (1.3).

3.3. Доказательство леммы 1.2. Мы продолжаем исследовать случай $(2,1)$ при $|\lambda\gamma| > 1$ и $|\lambda^2\gamma| < 1$. Предположим, что $B \neq 0$ в (3.15). Так как $\lambda^k\gamma^k\rho^k \to 0$ при $k \to \infty$, то можно ввести новую координату

$$x_{1\,\mathrm{new}} = x_1 + \frac{1}{B} b_0 \lambda^k \gamma^k \rho^k (c_2 \cos k\varphi - c_1 \cos k\varphi + \nu_k^2) x_2.$$

Тогда (3.15) перепишется в следующем виде:

$$\begin{gathered}\bar{x}_1 = y + \frac{b_0 A_{21}(k\varphi)}{B}(c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi + \nu_k^2)\lambda^{2k}\gamma^k x_1 + O(\lambda^k),\\ \bar{x}_2 = O\left(\frac{\lambda^k}{\rho^k}\right), \qquad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + O(\lambda^k).\end{gathered} \tag{3.18}$$

Заметим, что это отображение является экспоненциально сжимающим по координате x_2 (с коэффициентом сжатия $O(\lambda^k\rho^{-k})$), тогда как в областях фазового пространства, где есть сжатие по координатам x_1 и y, коэффициент сжатия по этим переменным отделён от нуля при $B \neq 0$. Тогда из теоремы 4.4 в [29] следует, что у отображения (3.18) для любых $Q, R > 0$ при каждом достаточно большом k в области $\|(x,y)\| \leqslant Q$ при $\|(M,B)\| \leqslant R$ существует C^{r-2}-гладкое нелокальное асимптотически устойчивое инвариантное центральное многообразие $\mathcal{M}_k^c$ вида $x_2(x_1, y, M, B) = O(\lambda^k\rho^{-k})$. Отображение (3.18) в ограничении на $\mathcal{M}_k^c$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\bar{x}_1 = y + \frac{b_0 A_{21}(k\varphi)}{B}(c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi + \nu_k^2)\lambda^{2k}\gamma^k x_1 + O(\lambda^k),\\ &\bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + O(\lambda^k).\end{aligned} \tag{3.19}$$

В области, где B равномерно ограничено, $|B| < Q$, из (3.16) находим, что $c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi = O(\lambda^{-k}\gamma^{-k})$. Так как $|\lambda\gamma| > 1$, получаем

$$c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi = \pm\sqrt{c_1^2 + c_2^2} + \ldots,$$

где многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $k \to \infty$. Также (см. (3.8))

$$A_{21}(k\varphi) = a_{21} \cos k\varphi + a_{22} \sin k\varphi = \pm\frac{a_{21}c_2 - a_{22}c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} + \ldots.$$

Таким образом,

$$b_0 A_{21}(k\varphi)(c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi + \nu_k^2) = b_0(a_{21}c_2 - a_{22}c_1) + \ldots.$$

Легко видеть из (2.6), что константа $J_1 = b_0(a_{21}c_2 - a_{22}c_1)$ есть не что иное как якобиан глобального отображения T_1, вычисленный в точке $(x = 0, y_1 = y^-)$ при $\varepsilon = 0$. Заметим также, что в этом случае $\lambda^{2k}\gamma^k$ — это главная часть якобиана локального отображения T_0^k. Обозначим

$$J_k = J_1 \lambda^{2k}\gamma^k.$$

Тогда отображение (3.19) можно записать в следующем виде:

$$\bar{x}_1 = y + \frac{J_k}{B}x_1 + o(J_k), \qquad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + O(\lambda^k). \tag{3.20}$$

Сделаем еще одну замену координат

$$x_{1\,\mathrm{new}} = x_1, \qquad y_{\mathrm{new}} = y + \frac{J_k}{B}x_1 + o(J_k) \equiv \bar{x}_1.$$

Тогда (3.20) примет следующий вид:

$$\bar{x}_1 = y, \qquad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + \frac{J_k}{B}y + \frac{2J_k}{B}x_1 y + o(J_k). \tag{3.21}$$

Дополнительными сдвигами координаты y и параметра M можно добиться того, что

$$y_{\mathrm{new}} = y - \frac{J_k}{2B}, \qquad M_{\mathrm{new}} = M - \frac{J_k^2}{4B^2},$$

приводим отображение (3.21) к виду (1.7). Лемма 1.2 доказана.

3.4. Отображения первого возвращения в случае $(1,2)$**.** Здесь x одномерно и $y = (y_1, y_2)$ двумерно;

$$A \equiv \lambda, \qquad B \equiv \gamma \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

В силу (2.4) и (2.7) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$, для каждого достаточно большого k и всех малых ε, может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 - x^+ &= a\lambda^k x_0 + b_0(y_{k1} - y_1^-) + b_1\gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k1}) + \\ &\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^2 + |y_{k1} - y_1^-|(|\lambda|^k|x_0| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k|x_0| + \hat{\gamma}^{-k}(|\bar{x}_0| + \|\bar{y}_k\|)\Big), \\ \gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k1} - \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k2}) &= \mu + c\lambda^k x_0 + D_0(y_{k1} - y_1^-)^2 + \\ &\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^3 + |y_{k1} - y_1^-|(|\lambda|^k|x_0| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k|x_0| + \hat{\gamma}^{-k}(|\bar{x}_0| + \|\bar{y}_k\|)\Big), \\ y_{k2} - y_2^- &= e\lambda^k x_0 + d_1(y_{k1} - y_1^-) + d_2\gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k1}) + \\ &\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^2 + |y_{k1} - y_1^-|(|\lambda|^k|x_0| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k|x_0| + \hat{\gamma}^{-k}(|\bar{x}_0| + \|\bar{y}_k\|)\Big); \end{aligned} \tag{3.22}$$

где, напомним, $0 < \hat{\lambda} < |\lambda|$, $\hat{\gamma} > \gamma$, и мы, кроме того, предполагаем, что $\hat{\lambda}$ и $\hat{\gamma}$ достаточно близки к $|\lambda|$ и γ соответственно.

Сдвинем начало координат,

$$x_{\text{new}} = x_0 - x^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, \qquad y_{1\,\text{new}} = y_{k1} - y_1^-(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^2, \qquad y_{2\,\text{new}} = y_{k2} - y_2^-(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^3,$$

так, чтобы первое и третье уравнения из (3.22) не содержали членов, зависящих только от ε, а второе – линейных членов по $(y_1 - y_1^-)$. Здесь $\tilde{\nu}_k^i(\varepsilon) = O(\gamma^{-k})$. Тогда если мы дополнительно разрешим первое уравнение относительно $\bar{x}$ и подставим соответствующее выражения в правую часть остальных уравнений, то (3.22) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= O\Big(|y_1| + |\lambda|^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|\Big), \\ \gamma^{-k}\Big\{\cos k\psi \cdot \bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\|\bar{y}\|)\Big\} &= M_1 + c\lambda^k\, x + \tilde{D}_0\, y_1^2 + \\ &\quad + O\Big(|y_1|^3 + |\lambda|^k|x||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1|\Big), \\ y_2 - e\lambda^k\, x - \tilde{d}_1 y_1 &= d_2\gamma^{-k}\left\{(\cos k\psi + \nu_k^1)\bar{y}_2 + (\sin k\psi + \nu_k^2)\bar{y}_1\right\} + \\ &\quad + O\Big(y_1^2 + |\lambda|^k|x||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \hat{\gamma}^{-k}\|\bar{y}\|^2\Big), \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $\nu_k^{1,2} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$, коэффициенты $\tilde{D}_0$ и $\tilde{d}_1$ отличаются от D_0 и d_1 соответственно на некоторые малые величины порядка $O(\gamma^{-k})$ и введено обозначение

$$M_1 \equiv \mu - \gamma^{-k}E_0\, \cos(k\psi - \vartheta_2 + \dots) + c\lambda^k(x^+ + \dots), \tag{3.24}$$

$$E_0 = \sqrt{(y_1^-)^2 + (y_2^-)^2}, \qquad \cos\vartheta_2 = y_1^-/E_0, \qquad \sin\vartheta_2 = y_2^-/E_0. \tag{3.25}$$

Сделаем еще одну замену координат

$$x_{\text{new}} = x, \qquad y_{1\,\text{new}} = y_1, \qquad y_{2\,\text{new}} = y_2 - \tilde{d}_1 y_1.$$

Тогда отображение (3.23) перепишется в следующем виде

$$\bar{x} = O\left(|y_1| + |\lambda|^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|\right),$$

$$\begin{aligned}(\cos k\psi - d_1 \sin k\psi)\bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\|\bar{y}\|) = \\ = M_1\gamma^k + c\lambda^k\gamma^k x + \tilde{D}_0\gamma^k y_1^2 + O\left(\gamma^k|y_1|^3 + |\lambda|^k\gamma^k|x||y_1| + \hat{\lambda}^k\gamma^k|x| + \|\bar{y}\||y_1|\right),\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}y_2 - e\lambda^k x = d_2\gamma^{-k}\left\{(\cos k\psi + \nu_k^1)\bar{y}_2 + (\sin k\psi + d_1\cos k\psi + \nu_k^2)\bar{y}_1\right\} + \\ + O\left(y_1^2 + |\lambda|^k|x||y_1| + \hat{\lambda}^k|x| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\||y_1| + \hat{\gamma}^{-k}\|\bar{y}\|^2\right),\end{aligned}$$

с некоторыми новыми коэффициентами $\nu_k^{1,2} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$.

Введем новые координаты y_1 и y_2 по формулам

$$\begin{aligned}y_{1\,\text{new}} &= (\cos k\psi + \nu_k^1)y_2 + (\sin k\psi + d_1\cos k\psi + \nu_k^2)y_1, \\ y_{2\,\text{new}} &= \frac{1}{d_2}\gamma^k\left(y_2 - e\lambda^k x\right).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Старые координаты выражаются через новые по следующим формулам

$$\begin{aligned}y_2 &= d_2\gamma^{-k}y_{2\,\text{new}} + e\lambda^k x, \\ y_1 &= \frac{1}{s_0}y_{1\,\text{new}} - \frac{1}{s_0}(\cos k\psi + \nu_k^1)(d_2\gamma^{-k}y_{2\,\text{new}} + e\lambda^k x),\end{aligned} \tag{3.28}$$

где

$$s_0 \equiv s_0(k\psi) = \sin k\psi + d_1\cos k\psi + \nu_k^2. \tag{3.29}$$

Будем рассматривать только такие ψ, когда $s_0 \neq 0$. Тогда замена координат (3.27) невырожденная, и (3.26) перепишется в следующем виде:

$$\bar{x} = O(|y_1| + |\lambda|^k|x| + \gamma^{-k}(|y_2| + |\bar{y}|)),$$

$$\begin{aligned}\gamma^k\bar{y}_1(\cos k\psi - d_1\sin k\psi + \nu_k^3) - d_2\bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k}O(\bar{y}_2) + |\lambda\gamma|^k O(\bar{x}) = \\ = \gamma^{2k}s_0 M_1 + cs_0\lambda^k\gamma^{2k}x + \tilde{D}_0(s_0)^{-1}\gamma^{2k}y_1^2 + \\ + \gamma^{2k}O\left(y_1^3 + |\lambda|^k|x||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|\|y\| + \hat{\lambda}^k|x| + \gamma^{-k}\|y\|^2 + \hat{\gamma}^{-k}\|\bar{y}\|^2)\right),\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$y_2 = \bar{y}_1 + \gamma^k O\left(y_1^2 + |\lambda|^k|x||y_1| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|\|y\| + \gamma^{-k}\|\bar{y}\|^2 + \hat{\lambda}^k|x|\right),$$

где $\nu_k^3 = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$ — некоторый малый коэффициент.

Нормируем теперь координаты следующим образом:

$$x = \rho^k\gamma^{-2k}x_{\text{new}}, \qquad y_1 = \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0}\gamma^{-2k}y_{1\,\text{new}}, \qquad y_2 = \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0}\gamma^{-2k}y_{2\,\text{new}}, \tag{3.31}$$

где

$$1 < \rho < \frac{1}{|\lambda|\gamma^2}$$

(напомним, что $|\lambda\gamma^2| < 1$ по условию, и что мы предполагаем также, что s_0 отделено от нуля).

Тогда после нормировок (3.31) отображение (3.30) в новых координатах запишется в виде

$$\begin{aligned}&\bar{x}_1 = \phi_k^1(x, y, \bar{y}), \\ &\frac{1}{d_2}\gamma^k\bar{y}_1(\cos k\psi - d_1\sin k\psi + \nu_k^3) - \bar{y}_2 = \tilde{M} + y_1^2 + \phi_k^2(x, y, \bar{y}), \\ &y_2 = \bar{y}_1 + \phi_k^3(x, y, \bar{y}),\end{aligned} \tag{3.32}$$

где

$$\tilde{M} = \gamma^{4k}\frac{D_0}{d_2^2}\left[\mu - \gamma^{-k}(y_1^- \cos k\psi - y_2^- \sin k\psi + \dots) + c\lambda^k(x^+ + \dots)\right] \tag{3.33}$$

и $\phi_k^l = o(1)$ при $k \to \infty$.

Обратим внимание на то, что тригонометрический член

$$C(k\psi) \equiv \frac{1}{d_2}\gamma^k(\cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^3)$$

из (3.32) ограничен при больших k только тогда, когда $\cos k\psi - d_1 \sin k\psi$ близко к нулю, т.е. для значений ψ, близких к

$$\psi = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{d_1}\right) + \pi\frac{j}{k}, \quad j \in Z. \tag{3.34}$$

Для таких значений ψ коэффициент s_0 из (3.29) отделён от нуля: $s_0^2 = 1 + d_1^2 + \dots$.

Отметим, что значения (3.34) угла ψ при всевозможных j и k плотны в $(0, \pi)$. Это означает, что для любого $Q > 0$ в любой окрестности любой точки $\psi_0 \in (0, \pi)$ существуют интервалы ϑ_k (размеров порядка $Q\gamma^{-k}$) значений ψ такие, что коэффициент $C(k\psi)$ пробегает все значения из интервала $[-Q, Q]$, когда ψ пробегает ϑ_k.

В области значений ψ, где C конечно, мы можем разрешить систему (3.32) относительно $\bar{y}$. Отображение T_k примет вид

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \tilde{\phi}_k^1(x, y, M, C),\\
\bar{y}_2 &= M - y_1^2 + Cy_2 + \tilde{\phi}_k^2(x, y, M, C),\\
\bar{y}_1 &= y_2 + \tilde{\phi}_k^3(x, y, M, C),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

где $M = -\tilde{M}, C = C(k\psi)$, и $\tilde{\phi}_k = o(1)$. Положив теперь $y_{2new} = y_2 + \tilde{\phi}_k^3$, получаем в точности отображение (1.4) из леммы 1.1.

3.5. Отображения первого возвращения в случае $(2,2)$**.** Здесь $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ двумерны,

$$A \equiv \lambda\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B \equiv \gamma\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}.$$

В силу (2.4) и (2.8) отображение первого возвращения $T_k \equiv T_1 T_0^k$ при каждом достаточно большом k и при всех малых ε можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{01} - x_1^+ &= b_0(y_{k1} - y_1^-) + b_{11}\gamma^{-k}(\cos k\psi\ \bar{y}_{k2} + \sin k\psi\ \bar{y}_{k1}) +\\
&\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^2 + \gamma^{-k}|y_{k1} - y_1^-|\|\bar{y}_k\| + \lambda^k\|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\Big),\\[2ex]
\bar{x}_{02} - x_2^+ &= b_{12}\gamma^{-k}(\cos k\psi\ \bar{y}_{k2} + \sin k\psi\ \bar{y}_{k1}) +\\
&\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^2 + \gamma^{-k}|y_{k1} - y_1^-|\|\bar{y}_k\| + \lambda^k\|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\Big),\\[2ex]
\gamma^{-k}&(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k1} - \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k2}) =\\
&= \mu + \lambda^k C_1(k\varphi)x_{01} + \lambda^k C_2(k\varphi)x_{02} + D_0(y_{k1} - y_1^-)^2 +\\
&\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^3 + |y_{k1} - y_1^-|(\lambda^k\|x_0\| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k\|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\Big),\\[2ex]
y_{k2} - y_2^- &= \lambda^k E_1(k\varphi)x_{01} + \lambda^k E_2(k\varphi)x_{02} + d_1(y_{k1} - y_1^-) +\\
&\quad + d_2\gamma^{-k}(\cos k\psi \cdot \bar{y}_{k2} + \sin k\psi \cdot \bar{y}_{k1}) +\\
&\quad + O\Big((y_{k1} - y_1^-)^2 + |y_{k1} - y_1^-|(\lambda^k\|x_0\| + \gamma^{-k}\|\bar{y}_k\|) + \hat{\lambda}^k\|x_0\| + \hat{\gamma}^{-k}(\|\bar{x}_0\| + \|\bar{y}_k\|)\Big),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

где

$$C_1 = c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi, \qquad C_2 = c_2 \cos k\varphi - c_1 \sin k\varphi,$$
$$E_1 = e_1 \cos k\varphi + e_2 \sin k\varphi, \qquad E_2 = e_2 \cos k\varphi - e_1 \sin k\varphi, \tag{3.37}$$

и, по-прежнему, $0 < \hat{\lambda} < \lambda$, $\hat{\gamma} > \gamma$.

Введем новые координаты (сдвиг начала координат)

$$x_{1\,\mathrm{new}} = x_1 - x_1^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^1, \qquad x_{2\,\mathrm{new}} = x_2 - x_2^+(\varepsilon) + \tilde{\nu}_k^2,$$
$$y_{1\,\mathrm{new}} = y_{k1} - y_1^- + \tilde{\nu}_k^3, \qquad y_{2\,\mathrm{new}} = y_{k2} - y_2^- + \tilde{\nu}_k^4.$$

Здесь малые сдвиги $\tilde{\nu}_k^i(\varepsilon)$ (порядка $O(|\gamma|^{-k})$) выбираются так, чтобы первое, второе и четвертое уравнения из (3.36) не содержали бы свободных членов, а третье — линейного по y_1 члена. Кроме того, мы разрешаем первое и второе уравнения относительно $\bar{x}$ и подставляем полученное выражение в третье и четвертое уравнения. В результате, система (3.36) перепишется в следующем виде:

$$\bar{x}_1 = b_0 y_1 + O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + |\bar{y}|)\right),$$

$$\bar{x}_2 = O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + |\bar{y}|)\right),$$

$$\gamma^{-k}\left\{\cos k\psi \cdot \bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\|\bar{y}\|)\right\} =$$
$$= M_1 + C_1 \lambda^k x_1 + C_2 \lambda^k x_2 + \tilde{D}_0\, y_1^2 + O\left(|y_1|^3 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \|x\| + \gamma^{-k} \|\bar{y}\| |y_1|\right), \tag{3.38}$$

$$y_2 - \tilde{d}_1 y_1 - E_1 \lambda^k x_1 - E_2 \lambda^k x_2 = d_2 \gamma^{-k}\left\{(\cos k\psi + \nu_k^1)\bar{y}_2 + (\sin k\psi + \nu_k^2)\bar{y}_1\right\} +$$
$$+ O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \gamma^{-k} \|\bar{y}\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \|x\| + \hat{\gamma}^{-k} \|\bar{y}\|^2\right),$$

где $\nu_k^{1,2} = O(\hat{\gamma}^{-k}\gamma^k)$, коэффициенты $\tilde{D}_0$ и $\tilde{d}_1$ отличаются от D_0 и d_1 соответственно на некоторые малые величины порядка $O(\gamma^{-k})$ и введено обозначение

$$M_1 \equiv \mu - \gamma^{-k} E_0 \cos(k\psi + \vartheta_2 + \dots) + \lambda^k C_0 \cos(k\varphi - \vartheta_1 + \dots); \tag{3.39}$$

(см. формулы (3.25) и (3.10)).

Введем новую координату y_2 по формуле $y_{2new} = y_2 - \tilde{d}_1 y_1$. Тогда отображение (3.38) перепишется в следующем виде:

$$\bar{x}_1 = b_0 y_1 + O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + \|\bar{y}\|)\right),$$

$$\bar{x}_2 = O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + \|\bar{y}\|)\right),$$

$$(\cos k\psi - \tilde{d}_1 \sin k\psi)\bar{y}_1 - \sin k\psi \cdot \bar{y}_2 + (\hat{\gamma}/\gamma)^{-k} O(\|\bar{y}\|) =$$
$$= M_1 \gamma^k + C_1 \lambda^k \gamma^k x_1 + C_2 \lambda^k \gamma^k x_2 + \tilde{D}_0 \gamma^k y_1^2 +$$
$$+ O\left(\gamma^k |y_1|^3 + \lambda^k \gamma^k \|x\| |y_1| + \hat{\lambda}^k \gamma^k \|x\| + \|\bar{y}\| |y_1|\right), \tag{3.40}$$

$$y_2 - \lambda^k E_1 x_1 - \lambda^k E_2 x_2 = d_2 \gamma^{-k}\left\{(\cos k\psi + \nu_k^3)\bar{y}_2 + (\sin k\psi + d_1 \cos k\psi + \nu_k^4)\bar{y}_1\right\} +$$
$$+ O\left(y_1^2 + \lambda^k \|x\| |y_1| + \hat{\lambda}^k |x| + \gamma^{-k} \|\bar{y}\| |y_1| + \hat{\gamma}^{-k} \|\bar{y}\|^2\right),$$

где $\nu_k^{3,4} = O(\hat\gamma^{-k}\gamma^k)$. Введем новые координаты y по формулам

$$\begin{aligned} y_{1\,\mathrm{new}} &= (\cos k\psi + \nu_k^3)y_2 + (\sin k\psi + d_1\cos k\psi + \nu_k^4)y_1, \\ y_{2\,\mathrm{new}} &= \gamma^k \frac{1}{d_2}\left(y_2 - E_1\lambda^k x_1 - E_2\lambda^k x_2\right). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Для старых координат (y_1, y_2) имеем

$$\begin{aligned} y_2 &= \gamma^{-k} d_2 y_{2\,\mathrm{new}} + E_1\lambda^k x_1 + E_2\lambda^k x_2, \\ y_1 &= \frac{1}{s_0} y_{1\,\mathrm{new}} - \frac{d_1}{s_0}(d_2\cos k\psi + \nu_k^3)(\gamma^{-k} y_{2\,\mathrm{new}} + E_1\lambda^k x_1 + E_2\lambda^k x_2), \end{aligned} \tag{3.42}$$

где

$$s_0 \equiv s_0(k\psi) = \sin k\psi + d_1\cos k\psi + \nu_k^4. \tag{3.43}$$

Рассмотрим такие ψ, для которых s_0 равномерно отделено от нуля. Тогда (3.40) перепишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar x_1 &= \frac{b_0}{s_0} y_1 + O\left(y_1^2 + \lambda^k\|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + \|\bar y\|)\right), \\ \bar x_2 &= O\left(y_1^2 + \lambda^k\|x\| + \gamma^{-k}(\|y\| + \|\bar y\|)\right), \\ \frac{1}{d_2}\gamma^k \bar y_1(\cos k\psi - d_1\sin k\psi + \nu_k^5 + O(\bar y_1)) &- \bar y_2(1 + \nu_k^6 + O(\bar y_2)) + (\lambda\gamma)^k O(\bar x) = \\ &= \gamma^{2k} s_0 M_1 + \tilde D_0 (s_0)^{-1}\gamma^{2k} y_1^2 + \tilde C_1 s_0\lambda^k\gamma^{2k} x_1 + \tilde C_2 s_0 \lambda^k \gamma^{2k} x_2 + \\ &+ \gamma^{2k} O\left(|y_1|^3 + \lambda^k\|x\||y_1| + \gamma^{-k}(\|\bar y\|\|y\| + \|y\|^2) + \hat\lambda^k\|x\|^2 + \hat\gamma^{-k}\|\bar y\|^2\right), \\ y_2 &= \bar y_1 + O\left(\gamma^k\|y\|^2 + \lambda^k\gamma^k\|x\|\|y\| + \|\bar y\|\|y\| + \|\bar y\|^2 + \hat\lambda^k\gamma^k\|x\|\right), \end{aligned} \tag{3.44}$$

где $\nu_k^{5,6} = O(\hat\gamma^{-k}\gamma^k)$, а коэффициенты $\tilde C_1$ и $\tilde C_2$ отличаются от C_1 и C_2 соответственно на величины порядка $O(\hat\lambda^k\lambda^{-k})$.

Рассмотрим случай $\lambda\gamma^2 < 1$. Нормируем координаты в (3.44) следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho^{-k}\frac{d_2 s_0}{\tilde D_0}\gamma^{-2k} x_{1\,\mathrm{new}}, \qquad & x_2 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde D_0}\gamma^{-2k} x_{2\,\mathrm{new}}, \\ y_1 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde D_0}\gamma^{-2k} y_{1\,\mathrm{new}}, & y_2 &= \frac{d_2 s_0}{\tilde D_0}\gamma^{-2k} y_{2\,\mathrm{new}}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

где ρ — некоторое число такое, что $\lambda\gamma^2 < \rho < 1$.

Заметим, что, поскольку нормировочные коэффициенты в (3.45) асимптотически малы, то области определения новых координат (x, y) будут расти с ростом k и в пределе $k \to \infty$ будут покрывать все конечные значения. Это позволяет нам считать, что наше отображение будет определено в области $\|(x_{new}, y_{new})\| \leqslant Q$ для некоторого $Q > 0$, причем константа Q может быть сколь угодно большой. В этом случае отображение (3.44) для досточно больших k в координатах (3.45) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar x_1 &= \rho^k O(y_1) + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar y)\|), \\ \bar x_2 &= \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar y)\|), \\ \frac{1}{d_2}\gamma^k C(k\psi)\bar y_1 - \bar y_2 &= \tilde M + y_1^2 + \left(\frac{\lambda^k\gamma^{2k}}{\rho^k} + \gamma^{-k}\right) O(\|(x, y, \bar y)\|), \\ y_2 &= \bar y_1 + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar y)\|). \end{aligned} \tag{3.46}$$

где

$$\tilde{M} = \gamma^{4k} \frac{\tilde{D}_0}{d_2^2} M_1, \tag{3.47}$$

для M_1 имеет место формула (3.39) и

$$C(k\psi) = \cos k\psi - d_1 \sin k\psi + \nu_k^5. \tag{3.48}$$

Заметим, что коэффициенты $\tilde{M}$ и $C = d_2^{-1} C(k\psi)\gamma^k$ могут, очевидно, принимать произвольные конечные значения при больших k при изменении исходных параметров μ и ψ.

При этом C будет равномерно ограничено только в том случае, когда $\cos k\psi - d_1 \sin k\psi$ асимптотически близко к нулю, т.е. для значений ψ, близких к тем, которые задаются формулой (3.34). Как мы отмечали, для таких ψ величина s_0 из (3.43) равномерно отделена от нуля: $|s_0| = \sqrt{1+d_1^2}(1+\dots)$. Далее мы будем рассматривать только такие ψ.

В результате, в любой ограниченной области значений (x, y, M, C), отображение (3.44) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 = o(1), && \bar{x}_2 = o(1), \\ &\bar{y}_1 = y_2 + o(1), && \bar{y}_2 = -\tilde{M} + Cy_2 - y_1^2 + o(1), \end{aligned} \tag{3.49}$$

где через $o(1)$ мы обозначаем функции всех координат и параметров, которые равномерно в любой ограниченной области значений (x, y, M, C) стремятся к нулю при $k \to \infty$ вместе со всеми производными до порядка $(r-2)$ по координатам и до порядка $(r-3)$ по параметрам. Если положить $M = -\tilde{M}$ в (3.49), то придём как раз к искомому отображению (1.4).

Рассмотрим теперь случай $\lambda\gamma^2 > 1$ (но по прежнему $\lambda\gamma < 1$). Нормируем сейчас координаты в (3.44) следующим образом

$$\begin{aligned} &x_1 = \frac{d_2 b_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} x_{1\,\mathrm{new}}, && x_2 = q^k \gamma^{-2k} x_{2\,\mathrm{new}}, \\ &y_1 = \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} y_{1\,\mathrm{new}}, && y_2 = \frac{d_2 s_0}{\tilde{D}_0} \gamma^{-2k} y_{2\,\mathrm{new}}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где q — некоторое число из интервала $q \in \left(\gamma^{-1}, (\lambda\gamma^2)^{-1}\right)$. Этот интервал непуст и лежит в $(0,1)$, так как

$$1 > \frac{1}{\lambda\gamma^2} = \frac{\gamma^{-1}}{\lambda\gamma} > \gamma^{-1}.$$

Теперь отображение (3.44) в координатах (3.50) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 = y_1 + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ &\bar{x}_2 = \frac{\gamma^{-k}}{q^k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ &\frac{1}{d_2}\gamma^k C(k\psi)\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = M + y_1^2 + \frac{b_0}{d_2}\lambda^k\gamma^{2k}\left(c_{11}\cos k\varphi + c_{12}\sin\varphi + l_k\right)x_1 + \\ &\qquad + \lambda^k\gamma^{2k} q^k O(x_2) + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \\ &y_2 = \bar{y}_1 + \gamma^{-k} O(\|(x, y, \bar{y})\|), \end{aligned} \tag{3.51}$$

где $l_k = O((\hat{\lambda}/\lambda)^k)$ — некоторый малый коэффициент, а для M и $C(k\psi)$ имеют место формулы (3.47) и (3.48) (см. выше).

В отображении (3.51), по сравнению с (3.46), появляется еще один независимый параметр, помимо M и $C = \gamma^k C(k\psi)$. Это параметр

$$B = B(k\varphi) \equiv \frac{b_0}{d_2}\lambda^k\gamma^{2k}(c_{11}\cos k\varphi + c_{12}\sin\varphi + l_k).$$

Поскольку $\lambda\gamma^2 > 1$, то коэффициент $B(k\varphi)$ уже не мал (как в случае $\lambda\gamma^2 < 1$) и может принимать, при изменении φ, любые конечные значения при больших k. Ограниченным значениям B отвечают значения φ вблизи

$$\varphi = -\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{c_1}{c_2}\right) + \pi\frac{j}{k}, \qquad j \in Z. \tag{3.52}$$

В области ограниченных значений (x, y, M, B, C) отображение (3.51) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= y_1 + o(1), & \bar{x}_2 &= o(1), \\ \bar{y}_2 &= -M - Bx_1 + Cy_1 - y_1^2 + o(1), & \bar{y}_1 &= y_2 + o(1). \end{aligned}$$

Если поменять знаки у M и B, то придем к отображению (1.5).

Таким образом, лемма о рескейлинге доказана.

4. Доказательство основных теорем

Доказательство теорем 1.1–1.4 базируется на леммах о рескейлинге. Эти леммы позволяют нам провести сравнительно несложный анализ отображений первого возвращения $T_k(\varepsilon)$, которые при $\varepsilon \in \Delta_k$ принимают вид стандартных квадратичных отображений. Нам удобно доказывать теоремы 1.1–1.4 в следующей последовательности: сначала мы доказываем теорему 1.2, затем теорему 1.4 (для которых требуется по существу только линейный анализ неподвижных точек отображений первого возвращения), затем доказываем теорему 1.3. Теорема 1.1 выводится нами в процессе доказательства теорем 1.2 и 1.4.

4.1. Доказательство теоремы 1.2 и пунктов 1, 2 теоремы 1.1. Сначала проведем анализ неподвижных точек отображений первого возвращения (1.2)–(1.5) и (1.7) для того, чтобы найти значения параметров M, B, C, при которых у указанных отображений есть неподвижные точки с мультипликаторами на единичной окружности.

4.1.1. Отображение (1.2). Рассмотрим одномерное отображение параболы

$$\bar{y} = M - y^2.$$

Пусть $\nu_1 \neq 0$ — мультипликатор его некоторой неподвижной точки. Тогда координата y этой неподвижной точки удовлетворяет уравнениям $M = y + y^2$ и $2y = -\nu_1$, и мы получаем, что отображение параболы имеет неподвижную точку с данным мультипликатором ν_1 при

$$M = \frac{\nu_1^2}{4} - \frac{\nu_1}{2}. \tag{4.1}$$

Так как отображение (1.2) близко к отображению параболы вместе с достаточным количеством производных, то оно также будет иметь неподвижную точку с мультипликатором ν_1 при значении $M = M_k(\nu_1)$, которое будет асимптотически близко при $k \to \infty$ к значению (4.1). Остальные мультипликаторы неподвижной точки (один в случае $(1, 1)$ и два в случае $(2, 1)$) всегда меньше единицы по модулю – они стремятся к нулю при $k \to \infty$.

4.1.2. Отображение (1.3). Рассмотрим отображение Эно (предельное для (1.3)):

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M + Bx - y^2.$$

Пусть ν_1 и ν_2 — мультипликаторы его некоторой неподвижной точки (тогда они либо оба действительны, либо образуют комплексно сопряженную пару чисел; положим также, что $\nu_1\nu_2 \neq 0$). Координаты $x = y$ этой неподвижной точки удовлетворяют уравнению $M = y(1 - B) + y^2$. При этом, характеристическое уравнение имеет вид $\nu^2 + 2y\nu - B = 0$. Тогда легко получить, что

$$B(\nu_1, \nu_2) = -\nu_1\nu_2, \quad M(\nu_1, \nu_2) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}(\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_1\nu_2 - 2). \tag{4.2}$$

Ясно, что у отображения (1.3) также будет существовать неподвижная точка, имеющая данные мультипликаторы ν_1 и ν_2, при значениях M и B асимптотически близких к тем, что даются формулой (4.2). Третий мультипликатор всегда меньше единицы по модулю (стремится к нулю, когда $k \to \infty$).

4.1.3. Отображение (1.4). Рассмотрим отображение (предельное для (1.4)):

$$\bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2.$$

Пусть ν_1 и ν_2 — мультипликаторы его некоторой неподвижной точки (тогда, снова, они либо оба действительны, либо образуют комплексно сопряженную пару чисел; предполагаем, что $\nu_1\nu_2 \neq 0$). Координаты $y_1 = y_2 = y$ этой неподвижной точки удовлетворяют уравнению $M = y(1-C) + y^2$, а характеристическое уравнение имеет вид $\nu^2 - C\nu + 2y = 0$. Тогда легко получить, что

$$C = \nu_1 + \nu_2, \quad M = \frac{\nu_1\nu_2}{2}(1-C) + \frac{(\nu_1\nu_2)^2}{4}. \tag{4.3}$$

У отображения (1.4) также будет существовать неподвижная точка, имеющая данные мультипликаторы ν_1 и ν_2, при M и C асимптотически близких к заданным формулой (4.3). Остальные мультипликаторы (третий в случае (1,2) или третий и четвертый в случае (2,2)) всегда меньше единицы по модулю.

4.1.4. Отображение (1.5). Рассмотрим трехмерное отображение (предельное для (1.5)):

$$\bar{x} = y_1, \quad \bar{y}_1 = y_2, \quad \bar{y}_2 = M + Bx + Cy_2 - y_1^2. \tag{4.4}$$

Пусть ν_1, ν_2, ν_3 – ненулевые мультипликаторы его некоторой неподвижной точки (тогда либо они все три действительны, либо один действительный, а другие два образуют комплексно сопряженную пару чисел). Координаты $x = y_1 = y_2$ этой неподвижной точки удовлетворяют уравнению $M = x(1-B-C) + x^2$, а характеристическое уравнение имеет вид $-\nu^3 + C\nu^2 - 2x\nu + B = 0$. Тогда легко получить, что

$$\begin{gathered} B = \nu_1\nu_2\nu_3, \qquad C = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \\ M = (\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)(1-B-C) + \frac{(\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)^2}{4}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Очевидно, что у исходного отображения (1.5) также будет существовать неподвижная точка, имеющая данные мультипликаторы ν_1, ν_2, ν_3, при значениях параметров M, B и C, асимптотически близких к тем, что заданы формулой (4.5). Еще один мультипликатор этой точки при больших k всегда меньше единицы по модулю.

Таким образом, для любого наперед заданного набора $\{\nu_1, \dots, \nu_{d_e}\}$ из d_e мультипликаторов (где $d_e = 1$ в случае отображения (1.2), $d_e = 2$ для отображений (1.3) и (1.4) и $d_e = 3$ для отображения (1.5)) у каждого из отображений (1.2)–(1.5) существуют такие значения параметров, $M = M_k$, $B = B_k$, $C = C_k$, при которых имеется неподвижная точка, у которой d_e мультипликаторов равны в точности $\nu_1, \dots, \nu_{d_e}$. Заметим при этом, что указанные значения M_k, B_k, C_k параметров будут равномерно ограничены по k. Это влечет, в силу (1.6), что для соответствующих значений исходных параметров $(\mu, \varphi, \psi) = (\mu_k, \varphi_k, \psi_k)$ при $k \to +\infty$ мы имеем, во первых, $\mu_k \to 0$, а во-вторых, в случае $d_e \geqslant 2$, всегда можно указать подпоследовательность в (φ_k, ψ_k), сходящуюся к точке (φ_0, ψ_0), где φ_0 и ψ_0 — значения угловых аргументов комплексных мультипликаторов точки O диффеоморфизма f_0. Таким образом мы получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Для любого наперед заданного набора мультипликаторов $\{\nu_1, \dots, \nu_{d_e}\}$ существует последовательность $\varepsilon_k \to 0$ значений параметров ε такая, что диффеоморфизм f_ε имеет при $\varepsilon = \varepsilon_k$ однообходную периодическую траекторию, у которой d_e мультипликаторов равны в точности $\nu_1, \dots, \nu_{d_e}$, а остальные мультипликаторы лежат строго внутри единичного круга.*

Теорема1.2 вытекает из этого утверждения практически сразу. Действительно, в области Ньюхауса δ_j вблизи любого $\varepsilon \in \delta_j$ существуют значения параметров, отвечающих гомоклиническим касаниям к точке O, для которых условия **A**–**D** выполнены; как мы только что установили, сколь угодно малые возмущения в рамках одного и того же семейства f_ε дают периодические траектории (однообходные по отношению к вторичным гомоклиническим касаниям) с любым наперёд заданным набором мультипликаторов из d_e мультипликаторов на единичной окружности, в полном соответствии с теоремой 1.2.

Заметим, что в случае теоремы 1.1, мы имеем $d_e = 1$, т.е. речь идет о периодических траекториях, имеющих либо мультипликатор $\nu_1 = +1$, либо $\nu_1 = -1$. Здесь следствие 4.1 немедленно дает для интервалов Ньюхауса δ_j пункты 1 и 2 теоремы 1.1.

4.2. Доказательство теоремы 1.4 и пункта 3 теоремы 1.1. Здесь мы снова используем следствие 4.1, но уже для грубых периодических траекторий, у которых мультипликаторы $\nu_1, \dots, \nu_{d_e}$ не равны по модулю единице. Тогда получаем всего $d_e + 1$ различных типов грубых траекторий в соответствии с тем, сколько из этих d_e мультипликаторов лежат вне единичного круга: 0, 1, ... или все d_e. Первый случай отвечает устойчивой периодической траектории.

Напомним, что произвольно близко к любому значению параметров из областей Ньюхауса δ_j существует значение ε, для которого точка O имеет траекторию простого гомоклинического касания. Согласно следствию 4.1, сколь угодно близко к этому значению ε существует значение параметра, при котором f_ε имеет грубую периодическую траекторию в точности с d мультипликаторами вне единичного круга, для любого наперёд заданного $d = 0, \dots, d_e$. Так как эта траектория грубая, то она существует в некоторой области значений параметров. Повторяя рассуждения, внутри этой области мы находим меньшую область, отвечающую существованию ещё одной грубой периодической траектории с d мультипликаторами вне единичного круга, с тем же самым d, или с любым другим d от 0 до d_e, и т. д. Повторяя эту процедуру бесконечно много раз для каждого $d = 0, \dots, d_e$, мы получаем последовательность вложенных областей такую, что значения ε из пересечения этих областей отвечают существованию бесконечного множества грубых периодических траекторий со всевозможными наборами из $0, 1, \dots, d_e$ мультипликаторов, лежащих вне единичного круга. По построению, полученное множество значений ε – это пересечение счётного числа открытых и плотных в δ_j множеств, т.е. множество второй категории. Теорема доказана.

4.3. Доказательство теоремы 1.3. Так же как и при доказательстве теоремы 1.4, достаточно показать, что отображения первого возвращения $T^{(k)}$ имеют в некоторой области параметров (M, B), (M, C) или (M, C, B) устойчивую замкнутую инвариантную кривую. Чтобы получить счётное число замкнутых инвариантных кривых, применяется конструкция с вложенными областями, такая же, как и при доказательстве теоремы 1.4.

Рассмотрим сначала случаи седло-фокуса $(1, 2)$ и седло-фокуса $(2, 2)$ с $\lambda\gamma^2 < 1$. Согласно лемме 2.1, отображение $T^{(k)}$ в этом случае приводится к виду

$$\bar{x} = o(1), \qquad \bar{y}_1 = y_2, \qquad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2 + o(1). \tag{4.6}$$

Предельное отображение

$$\bar{y}_1 = y_2, \qquad \bar{y}_2 = M + Cy_2 - y_1^2 \tag{4.7}$$

имеет неподвижную точку с мультипликаторами $\nu_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ при значениях параметров (M, C) на следующей кривой (см. формулу (4.3)):

$$L : \{M = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}C, \ C = 2\cos\omega\}$$

(т.е. $|C| < 2$). При $\omega \neq \pi/2,\ 2\pi/3$ устойчивость замкнутой инвариантной кривой, которая рождается при бифуркациях такой неподвижной точки, определяется знаком первой ляпуновской величины. Напомним, что ляпуновская величина G_1 — это коэффициент при кубическом члене в записанной в полярных координатах (ρ, θ) нормальной форме $\bar{\rho} = \rho + G_1\rho^3 + o(\rho^3)$, $\bar{\theta} = \theta + \omega + O(r^2)$ отображения вблизи неподвижной точки. Для отображения (4.7) несложно подсчитать, что $G_1 = -1 - \dfrac{1}{2(1 - \cos\omega)}$, так что ляпуновская величина здесь всегда отрицательна. Так как G_1 — коэффициент при кубическом члене, то, следовательно, ляпуновская величина останется отрицательной для всех отображений, C^3-близких к (4.7).

Рассмотрим теперь отображение (4.6). При каждом достаточно большом k оно также имеет кривую в пространстве параметров вблизи кривой L, отвечающую существованию неподвижной точки с двумя мультипликаторами $e^{\pm i\omega}$ (а остальные мультипликаторы меньше единицы по модулю). Мы обозначим эту кривую через L_k. В ограничении на центральное многообразие вблизи неподвижной точки отображение (1.4) C^{r-2}-близко к (4.7). Так как $r \geqslant 5$, то получаем, что соответствующая ляпуновская величина для отображения (1.4) отрицательна; следовательно, при переходе значений параметров через L_k, рождается замкнутая устойчивая инвариантная кривая, и она существует в некоторой области параметров, что и требовалось.

В случае седло-фокуса $(2,2)$ с $\lambda\gamma^2 > 1$ отображение первого возвращения $T^{(k)}$ приводится к виду

$$\bar{x}_2 = o(1), \qquad \bar{x}_1 = y_1, \qquad \bar{y}_1 = y_2, \qquad \bar{y}_2 = M + Cy_2 + Bx_1 - y_1^2 + o(1). \tag{4.8}$$

Здесь при малых B у неподвижной точки, имеющей мультипликаторы $\nu_{1,2} = e^{\pm i\omega}$, $\nu_3 = B + o(1)$, $\nu_4 = o(1)$, ляпуновская величина также отрицательна. Это непосредственно вытекает из того, что при $B = 0$ отображение (4.8) вырождается при $k \to +\infty$ в отображение (4.7) по координатам y_1 и y_2, а отрицательность ляпуновской величины для последнего отображения мы только что установили. Таким образом, мы и в этом случае получаем, что у отображения первого возвращения для каждого достаточно большого k при значениях параметров из некоторой области существует устойчивая замкнутая инвариантная кривая.

В случае седло-фокуса $(2,1)$ с $d_e = 2$, т.е. при $\lambda\gamma > 1$, для нахождения устойчивых инвариантных кривых мы будем использовать уточненную форму отображения первого возвращения, которая выведена в лемме 1.2. Это так называемое обобщенное отображение Эно вида

$$\bar{x}_1 = y, \qquad \bar{y} = M - y^2 + Bx_1 + Q_k x_1 y + o(Q_k), \tag{4.9}$$

где $Q_k \neq 0$ и $Q_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Это отображение было исследовано в [5, 20], где, в частности, было показано, что для значений параметров (M, B) из некоторой области отображение (4.9) при достаточно больших k имеет устойчивую замкнутую инвариантную кривую. Именно, такая область примыкает к точке $(M = M_k^*, B = B_k^*)$, где

$$M_k^* = 3 - Q_k + o(Q_k), \quad B_k^* = -1 + Q_k/2 + o(Q_k),$$

для которой отображение (4.9) имеет неподвижную точку с мультипликаторами $(-1, -1)$.

Таким образом, во всех случаях с $d_e \geqslant 2$ у семейства f_ε существует счетная последовательность областей $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k$, накапливающихся к $\varepsilon = 0$ при $k \to \infty$, таких, что при $\varepsilon \in \tilde{\Delta}_k$ диффеоморфизм f_ε имеет устойчивую замкнутую инвариантную кривую. Чтобы получить счётное число замкнутых инвариантных кривых для плотного множества значений параметров из областей Ньюхауса δ_j, достаточно применить конструкцию с вложенными областями из доказательства теоремы 1.4.

Это завершает доказательство теоремы 1.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаврилов Н. К., Шильников Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I// Мат. сб. — 1972. — *88*, № 4. — С. 475–492; II// Мат. сб. — 1973. — *90*, № 1. — С. 139–157.
2. *Гонченко С. В.* Об устойчивых периодических движениях систем, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой// Мат. заметки. — 1983. — *33*, № 5. — С. 745–755.
3. *Гонченко С. В.* Бифуркации удвоения периода в системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой// В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений (под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой). — 1989. — С. 78–96.
4. *Гонченко С. В.* Гомоклинические касания, Ω-модули и бифуркации// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — *236*.
5. *Гонченко С. В., Гонченко В. С.* О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН (в печати).
6. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Докл. АН СССР. — 1991. — *320*, № 2. — С. 269–272.
7. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай)// Докл. РАН. — 1993. — *329*, № 4 — С. 404–407.
8. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Докл. РАН. — 1993. — *330*, № 2. — С. 144–147.

9. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмлов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1997. — *216.* — С. 7–118.
10. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса// Тр. Междунар. конф., посв. 90-летию Л. С. Понтрягина. — М.: ВИНИТИ, 1999. — С. 67–129.
11. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми// Докл. АН СССР. — 1986. — *286*, № 5. — С. 1049–1053.
12. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической траекторией// Укр. мат. ж. — 1987. — *39*, № 1. — С. 21–28.
13. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* Инварианты Ω-сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией// Укр. мат. ж. — 1990. — *42*, № 2. — С. 153–159.
14. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре// Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — *56*, № 6. — С. 1165–1196.
15. *Овсянников И. М., Шильников Л. П.* Системы с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса и спиральный хаос// Мат. сб. — 1991. — *182.* — С. 1043–1073.
16. *Стенькин О. В., Шильников Л. П.* О бифуркациях периодических траекторий в окрестности негрубой гомоклинической кривой// Дифференц. уравнения. — 1997. — *33*, № 3. — С. 377–384.
17. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Пример дикого странного аттрактора// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 2. — С. 137–160.
18. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре—Биркгофа// Мат. сб. — 1967. — *74* (*116*), № 4. — С. 378–397.
19. *Gonchenko S. V.* Dynamics and moduli of Ω-conjugacy of 4D-diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic orbit to a saddle-focus fixed point// Amer. Transl. Math. — 2000. — *200*, № 2. — С. 107–134.
20. *Gonchenko S. V., Gonchenko V. S.* On Andronov—Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies/ Preprint № 556, Berlin: WIAS, 2000.
21. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Sten'kin O. V.* On Newhouse regions with with infinitely many stable and unstable invariant tori// Proc. of Int. Conf. dedicated to 100th Birthday of A. A. Andronov, Vol. 1/ Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics. — Nizhny Novgorod: Inst. of Appl. Phys. RAS, Univ. of Nizhny Novgorod, 2002. — С. 80–102.
22. *Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V.* On models with non-rough Poincaré homoclinic curves// Physica D. — *62*, №№ 1–4. — С. 1–14.
23. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits// Interdisc. J. Chaos. — 1996. — *6*, № 1. — С. 15–31.
24. *Newhouse S.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks// Topology. — 1974. — *13.* — С. 9–18.
25. *Newhouse S. E.* The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms// Publ. Math. IHES. — 1979. — *50.* — С. 101–151.
26. *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks// Ann. Math. — 1994. — *140.* — С. 91–136.
27. *Romero N.* Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions// Ergod. Theory and Dynam. Syst. — 1995. — *15.* — С. 735–757.
28. *Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Normal forms and Lorenz attractors// Int. J. Bifurcations Chaos. — 1993. — *1*, № 4. — С. 1123–1139.
29. *Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I. — World Scientific, 1998.
30. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points// В кн.: Differ. and Comb. Topology. — Princeton Univ. Press, 1965. — С. 63–80.
31. *Tatjer J. C.* Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies// Ergod. Theory and Dynam. Systems. — 2001. — *21.* — С. 249–302.
32. *Turaev D. V.* On dimension of non-local bifurcational problems// Int. J. Bifurcation Chaos. — 1996. — *6*, № 5. — С. 919–948.