

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Д. В. Тураев, А. Л. Шильников, Л. П. Шильников

1. Введение. Гомоклиническая петля с периодической внешней силой

Основными объектами классической теории синхронизации являются задача о воздействии внешнего периодического сигнала на автоколебательную систему и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем. Цель, которая обычно здесь ставится, состоит в выделении в пространстве параметров областей существования грубых устойчивых периодических движений — областей синхронизации — и описании динамических явлений, возникающих при переходе через границы этих областей. Сразу отметим, что возникающие здесь динамические системы многомерны (размерность фазового пространства три и выше). Поэтому понятно, что изучение конкретных моделей требует использования широкого арсенала методов современной качественной теории.

Относительно просто рассматриваемые задачи решаются в случае малой внешней силы или малого взаимодействия, которые мы будем считать имеющими порядок μ . Здесь легко строится отображение Пуанкаре T_μ , которое в подходящих (так называемых нормальных) координатах представляется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, \theta, \mu), \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega + g_0(x, \theta, \mu) \equiv g(x, \theta, \mu) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$, $\theta \in S^1$, f и g_0 — периодические по θ функции с периодом 2π . При этом $f(0, \theta, 0) \equiv 0$, $g_0(0, \theta, 0) \equiv 0$ и $\|f'_x\| < 1$ всюду в некотором кольце $K_\delta = \{(x, \theta), \theta \in S^1, \|x\| \leq \delta\}$ при всех малых μ .

Согласно принципу кольца [3, 27], у отображения T_μ при всех достаточно малых μ будет существовать устойчивая гладкая инвариантная замкнутая кривая вида $x = h(\theta, \mu)$, к которой стремятся все траектории из K_δ . В фазовом пространстве инвариантной кривой отображения Пуанкаре отвечает двумерный устойчивый инвариантный тор. Поведение траекторий на торе определяется отображением инвариантной кривой, которое является диффеоморфизмом окружности вида

$$\bar{\theta} = \theta + \omega + \mu\alpha(\theta, \mu) \pmod{2\pi},$$

где $\alpha(\theta)$ — периодическая функция с периодом 2π . Здесь, как правило, к каждому ω , соизмеримому с 2π , при $\mu = 0$ будут примыкать области синхронизации на плоскости параметров (ω, μ) , также называемые языками Арнольда. Они схематически показаны на рис. 1.

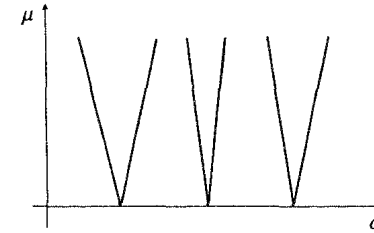


Рис. 1. Языки Арнольда на плоскости параметров (ω, μ)

Внутри каждого языка Арнольда число вращения Пуанкаре

$$r = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (\theta_{n+1} - \theta_n)$$

рационально и постоянно, устойчивые периодические движения с данным числом вращения на торе отвечают режиму синхронизации.

При переходе через границы областей синхронизации структура множества траекторий на торе должна изменяться. При этом в силу непрерывной зависимости числа вращения от параметров должны реализовываться и иррациональные числа вращения, которым отвечает уже не режим синхронизации, а квазипериодический режим (биения). Заметим, что в прикладных исследованиях периодические режимы с большими периодами в узких языках Арнольда обычно не воспринимаются как режимы синхронизации, поскольку они практически неотличимы от квазипериодических.

Данная картина имеет место для классического уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t \quad (1)$$

в квазилинейном случае, т. е. при $\mu \ll 1$ и $A^2 < \frac{4}{27}$. Это следует из известных исследований Ван-дер-Поля [35], Андронова и Витта [7], Крылова и Боголюбова [13], а также работы Афраймовича и Шильникова [1], объясняющей сохранение тора при исчезновении седлового периодического движения в случаях главных резонансов.

Основная задача, которая будет обсуждаться в настоящей работе, состоит в изучении динамических эффектов, возникающих при

увеличении μ при выходе из области существования инвариантного тора. Поскольку исследования этого вопроса оказали значительное влияние на современное точное естествознание, мы более подробно остановимся на истории проблемы.

В 1927 году Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк опубликовали свои результаты по экспериментальному исследованию генератора с неоновой лампой, находящегося под воздействием периодического сигнала. Основные свои выводы они резюмировали следующим текстом [36]: «Часто в телефонных трубках перед скачком частоты к соседнему, меньшему значению слышится переходный шум. Однако это второстепенное явление, главный эффект заключается в регулярном делении частоты». А это значило, что они наблюдали сосуществование устойчивых периодических режимов с различными периодами (при этом очень большими, в эксперименте они были в 100–200 раз больше, чем период внешней силы), а также, говоря современным языком, сложное поведение траекторий (хоть и оцененное как второстепенный эффект). Последнее указывает если не на существование в фазовом пространстве странного аттрактора, то на наличие нетривиального множества, состоящего из седловых траекторий, ответственного за сложный переходный процесс.

Эти эксперименты не оставили без внимания Картрайт и Литлвуд. В 1945 году они в краткой форме излагают [8] удивительные результаты своего анализа уравнения Ван-дер-Поля (1) при $\mu \gg 1$. Так, они указывают на наличие двух сортов интервалов значений A в отрезке $(0, 1/3)$: в одних интервалах динамика простая, а в других, наряду с существованием двух устойчивых периодических движений с разными периодами, есть также нетривиальное неблуждающее множество, состоящее из неустойчивых траекторий и допускающее описание на языке символической динамики из двух символов. Тем самым впервые было установлено, что в трехмерных моделях неконсервативного происхождения неблуждающее множество может содержать счетное множество периодических движений и континуум непериодических траекторий. Развернутое изложение этих результатов было, однако, дано Литлвудом только позднее, в 1957 году [16, 17].

В 1949 году Левинсон [15] дал объяснение этим результатам на примере уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} \operatorname{sign}(x^2 - 1) + \varepsilon x = A \sin t, \quad (2)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Поскольку уравнение (2) кусочно-линейно, изучение поведения траекторий значительно упростилось и могло быть изложено достаточно прозрачно.

Идея типичности сложного поведения траекторий для широкого класса нелинейных уравнений была высказана Литлвудом в [16] практически в явном виде; здесь любопытно также отметить, что уже в первой работе [8] содержалось пророческое высказывание о том, что при значениях A из интервалов со сложным поведением траекторий, описываемых уравнениями вандерполевского типа, системы могут быть топологически эквивалентны, т. е. обнаруженный хаос виделся Картрайт и Литлвуду как грубое явление. После того как Левинсон указал на эти результаты Смейлу, тот обнаружил, что они допускают простую геометрическую интерпретацию, по крайней мере на качественном уровне, и на основе этого анализа построил в 1961 году диффеоморфизм подковы с нетривиальным гиперболическим множеством, топологически сопряженным схеме Бернулли из двух символов, с чего, собственно, и началась современная теория динамического хаоса.

В 70–80-х годах изучение уравнений вандерполевского типа продолжили Осипов [23] и Леви [14]. Для нелинейностей близких к кусочно-линейным ими было дано полное описание неблуждающих множеств в отмеченных интервалах и доказана их гиперболичность.

В указанных работах рассмотрение велось в конечном числе сегментов значений A . Оставшиеся интервалы в сумме составляли множество, мера которого стремилась к нулю при $\mu \rightarrow \infty$ (т. е. $\varepsilon \rightarrow 0$). Таким образом, в силу сингулярной природы данной задачи динамическими явлениями, происходящими в интервалах негиперболичности, можно, в принципе, и пренебречь в первом порядке. Заметим, что именно в этих интервалах происходит переход от простого поведения к сложному, сопровождающийся появлением и исчезновением устойчивых периодических движений, возникновением негрубых гомоклинических орбит, влекущих, в свою очередь, существование интервалов негрубости Ньюхауса, и т. д. В моделях, не содержащих малого параметра при старшей производной, все это немедленно требует настоящего анализа.

Естественным примером здесь служит автономная система

$$\dot{x} = X(x, \mu),$$

находящаяся под действием периодического возмущения малой амплитуды порядка μ , у которой при $\mu > 0$ существует устойчивый предельный цикл L_μ , влипающий при $\mu \rightarrow 0$ в гомоклиническую петлю седлового состояния равновесия. Исследованию таких систем был посвящен цикл работ Афраймовича и Шильникова [2, 3, 4]. Ниже

излагается ряд полученных результатов, имеющих принципиальное значение для теории синхронизации.

Для простоты ограничимся случаем двух уравнений. Предположим, что автономная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + F(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma y + G(x, y, \mu) \end{aligned}$$

имеет при всех малых μ состояние равновесия $O(0, 0)$ типа седло, и в нем седловая величина отрицательна:

$$\sigma = \lambda + \gamma < 0. \quad (3)$$

Пусть также седло имеет петлю сепаратрисы при $\mu = 0$ (рис. 2, а).

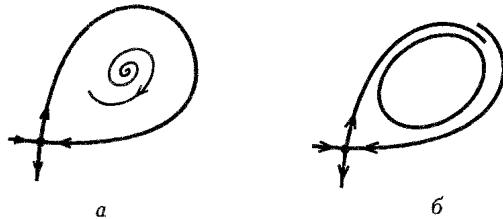


Рис. 2. Бифуркация рождения устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы на плоскости.

Как известно [5, 6], при малых μ из петли может родиться только одно, и притом устойчивое, периодическое движение L_μ . Пусть это имеет место при $\mu > 0$ (рис. 2, б). В общем случае период родившегося цикла будет порядка $|\ln \mu|$. Это роднит рассматриваемую задачу с уравнениями вандерполевского типа, у которых при $A = 0$ период релаксационного цикла имеет порядок $1/\varepsilon$, т. е. также стремится к бесконечности при стремлении малого параметра к нулю.

Относительно возмущенной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + F(x, y, \mu) + \mu p(x, y, t, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma y + G(x, y, \mu) + \mu q(x, y, t, \mu), \end{aligned} \quad (4)$$

где p и q — 2π -периодические функции по t , будем предполагать, что функция Мельникова положительна, т. е. при всех достаточно малых $\mu > 0$ у седлового периодического движения, близкого к $(x = 0, y = 0)$, устойчивое W_μ^s и неустойчивое W_μ^u многообразия не пересекаются (рис. 3).

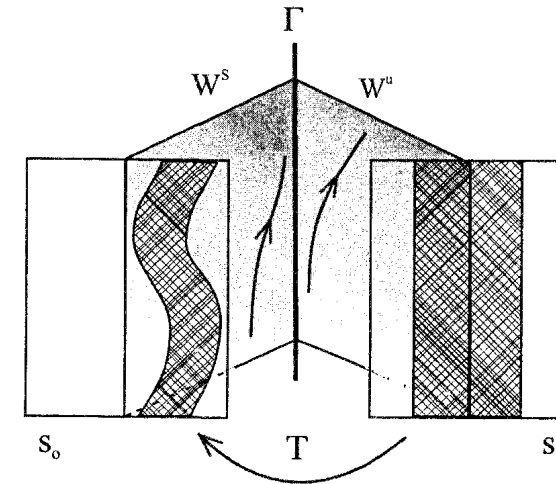


Рис. 3. Отображение Пуанкаре переводит секущую S_1 в плоскости $x = \delta$ к неустойчивому многообразию W^u седлового периодического движения Γ на секущую S_0 (в той же плоскости) к устойчивому многообразию.

Легко видеть, что плоскость $x = \delta$ в пространстве $\{x, y, t\}$ является секущей для системы (4) при малом δ . Соответствующее отображение Пуанкаре T_μ может быть записано в виде, близком к следующему модельному отображению:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= [y + \mu(1 + f(\theta))]^\nu, \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega - \frac{1}{\gamma} \ln[y + \mu(1 + f(\theta))], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\nu = -\frac{\lambda}{\gamma} > 1$, ω — некоторая константа, и $\mu(1 + f(\theta))$ — функция Мельникова с $\langle f(\theta) \rangle = 0$. Правую часть второго уравнения следует вычислять по модулю 2π , т. е. θ — угловая переменная. Ее можно интерпретировать как разность фаз между внешним воздействием и откликом системы; таким образом, устойчивые неподвижные точки этого отображения (т. е. точки, для которых $\bar{\theta} = \theta \bmod 2\pi$) отвечают режиму синхронизации.

Предельное множество отображения T_μ при достаточно малых μ лежит в кольце $K_\mu = \{0 < x < C\mu^\nu, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, для некоторого $C > 0$. После замены $y \rightarrow \mu^\nu y$ отображение Пуанкаре примет вид

$$\begin{aligned} \bar{y} &= [1 + f(\theta)]^\nu + \dots, \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{\omega} - \frac{1}{\gamma} \ln[1 + f(\theta)] + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где многоточиями обозначены члены, стремящиеся к нулю вместе с производными, а $\tilde{\omega} = \omega - \frac{1}{\gamma} \ln \mu$ стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow +0$, т. е. $\tilde{\omega} \bmod 2\pi$ принимает произвольное значение из интервала $[0, 2\pi)$ счетное число раз. Таким образом, динамика отображения Пуанкаре во многом определяется свойствами семейства отображений окружности

$$\bar{\theta} = \theta + \tilde{\omega} + \mathcal{F}(\theta) \bmod 2\pi, \quad (7)$$

где $\mathcal{F}(\theta) = -\frac{1}{\gamma} \ln[1 + f(\theta)]$.

Утверждение [2, 3].

1. В случае, если

$$\frac{1}{\gamma} \frac{f'(\theta)}{1 + f(\theta)} < 1, \quad (8)$$

отображение T_μ имеет устойчивую гладкую инвариантную замкнутую кривую вида $y = h(\theta, \mu)$, которая содержит ω -предельное множество любой траектории из K_μ .

2. Пусть существует отрезок $I = [\theta_1, \theta_2]$, такой, что либо

$$f'(\theta) < 0 \quad (9)$$

всюду на I и

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 + f(\theta_1)}{1 + f(\theta_2)} > 2\pi(m + 1), \quad m \geq 2, \quad (10)$$

либо

$$\frac{1}{\gamma} \frac{f'(\theta)}{1 + f(\theta)} > 2 \quad (11)$$

всюду на I и

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 + f(\theta_2)}{1 + f(\theta_1)} > 2(\theta_2 - \theta_1) + 2\pi(m + 1), \quad m \geq 2. \quad (12)$$

Тогда при достаточно малых $\mu > 0$ отображение T_μ будет иметь гиперболическое множество Σ_μ , сопряженное со схемой Бернулли (см. символы).

Так, в случае $f(\theta) = A \sin \theta$, если $A < \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$, при всех малых μ аттрактором является инвариантная замкнутая гладкая кривая, а при $A > \tanh 3\pi\gamma$ имеет место сложная динамика.

Условия (11) или (9) обеспечивают растяжение по θ в области $\Pi : \theta \in I$ и, следовательно, гиперболичность отображения (5) в этой области (сжатие по переменной y всегда достигается при достаточно малых y за счет того, что $\nu > 1$). Когда выполнены условия (12) или (10), соответственно, образ области Π пересекает ее как минимум m раз (рис. 4, а). Таким образом, мы получаем конструкцию, вполне аналогичную подкове Смейла, и утверждение пункта 2 достигается, скажем, ссылкой на лемму о седловой неподвижной точке в счетном произведении банаховых пространств [26].

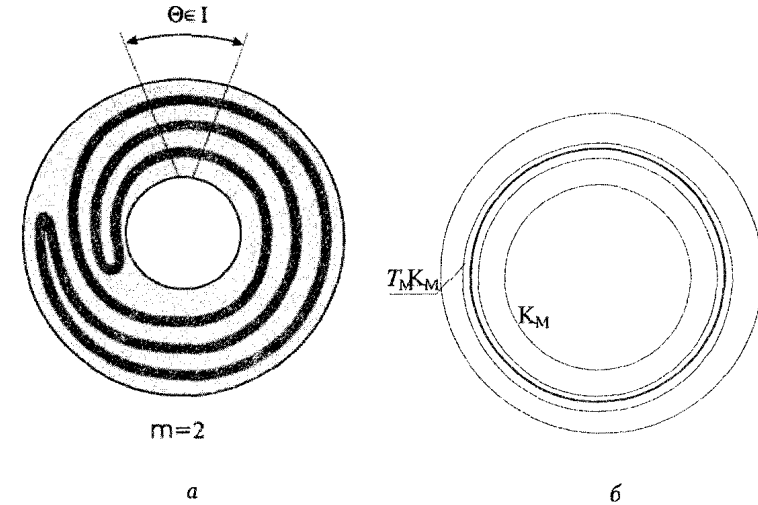


Рис. 4. Образ области Π пересекает ее как минимум m раз (а). Образ кольца K_μ под действием отображения T_μ не имеет складок (б).

В случае выполнения условия (8) образ кольца K_μ под действием отображения T_μ не имеет складок (рис. 4, б) при достаточно малых μ , т. е. также представляет собой кольцо, ограниченное кривыми вида $y = h_\pm(\theta)$. Образ этого кольца также имеет подобный вид и т. д. В результате мы получаем последовательность вложенных колец, и сжатие по переменной y обеспечивает их пересечение по единственной и гладкой замкнутой кривой. То, что эта кривая инвариантна и притягивает все траектории, следует из конструкции; формальное доказательство утверждения (пункта 1) достигается ссылкой на принцип кольца [3] (см. также [27]).

Для детального исследования областей синхронизации мы ограничим себя далее случаем $f(\theta) = A \sin \theta$ (в принципе, точно так же можно рассмотреть случай $f(\theta) = Ag(\theta)$, где $g(\theta)$ — функция

с заданными свойствами). Это позволяет построить весьма разумную бифуркационную диаграмму (рис. 5, 6) на плоскости параметров $(A, -\ln \mu)$ в области $0 \leq A < 1, 0 < \mu < \mu_0$, где μ_0 достаточно мало.

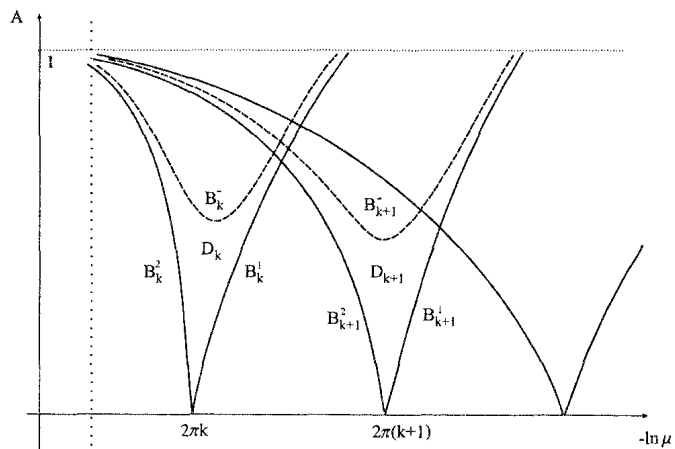


Рис. 5. Пересекающиеся резонансные зоны

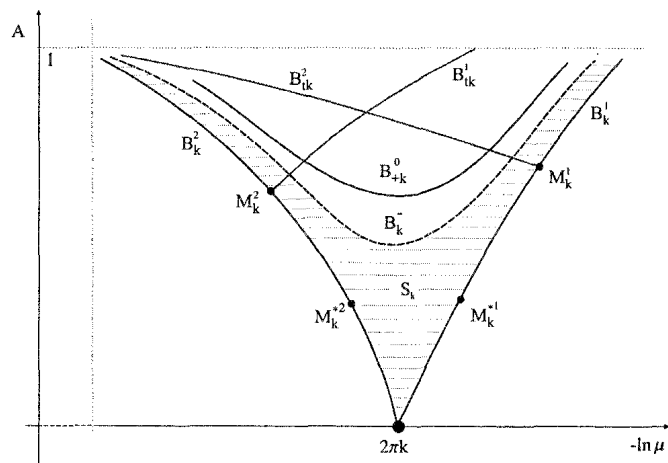


Рис. 6. Бифуркационные кривые в резонансной зоне

Можно показать, что к каждой точке на оси $-\ln \mu_0$ с координатами $(2\pi k, 0)$ (где k — достаточно большое целое число) примыкает область D_k , отвечающая существованию пары неподвижных точек отображения Пуанкаре таких, что $\bar{\theta} = \theta + 2\pi k$; в системе (4) им отве-

чают периодические движения периода $2\pi k$. Эта область ограничена двумя бифуркационными кривыми B_k^1 и B_k^2 , для значений параметров которых неподвижные точки сливаются в одну типа седло-узел. Кривые B_k^1 продолжают до прямой $A = 1$, а кривые B_k^2 уходят влево (что соответствует возрастанию μ), оставаясь в области $A < 1$. При этом B_k^2 будет пересекать кривые B_m^1 и B_m^2 при $m < k$.

Внутри области D_k одна из неподвижных точек, Q_k , всегда седловая. Другая точка, P_k , устойчива в области S_k между кривыми B_k^1, B_k^2 и B_k^- ; при переходе через B_k^- точка P_k теряет устойчивость и из нее рождается цикл периода два. Область S_k является областью синхронизации, так как отвечает существованию устойчивого периодического движения периода $2\pi k$. Заметим, что для любых достаточно больших целых k и m пересечение областей S_k и S_m непусто. Таким образом, для всех достаточно больших k и m имеются области сосуществования устойчивых периодических точек периодов $2\pi k$ и $2\pi m$.

В области D_k замкнутая инвариантная кривая, которая существует, согласно утверждению (пункт 1), по крайней мере при $A < \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, представляет собой объединение неустойчивого многообразия W^u седловой неподвижной точки Q_k и устойчивой точки P_k (рис. 7). При переходе через B_k^- инвариантная кривая, очевидно, разрушается (рис. 8).

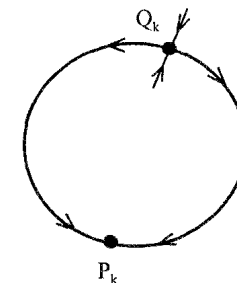


Рис. 7. Замыкание неустойчивого многообразия седловой неподвижной точки замыкнутой инвариантной кривой.

Другой механизм разрушения замкнутой инвариантной кривой связан с появлением гомоклинических касаний, т. е. касаний неустойчивого и устойчивого многообразий точки Q_k . Такие касания имеют место на бифуркационных кривых B_{tk}^1 и B_{tk}^2 , каждая отвечает образованию гомоклинического касания на своей компоненте множества $W^u \setminus Q_k$ (рис. 9).

Кривые B_{tk}^1 и B_{tk}^2 замечательны тем, что они разграничивают область синхронизации S_k на области с простой и сложной динамикой. Ниже кривых B_{tk}^1 и B_{tk}^2 в области S_k устойчивая точка P_k является единственным аттрактором, к ней стремятся все траектории, кроме седловой неподвижной точки Q_k . В области выше кривых B_{tk}^1 и B_{tk}^2 точка Q_k имеет грубую гомоклиническую траекторию,

и соответственно отображение имеет нетривиальные гиперболические множества [26]. Отметим, что S_m ($m < k$) пересекает S_k всегда выше B_{tk}^2 . Поэтому в данной модели в области $S_k \cap S_m$, отвечающей существованию пары устойчивых периодических траекторий различных периодов $2\pi k$ и $2\pi m$, всегда есть и сложная динамика, аналогичная случаю уравнения Ван-дер-Поля.

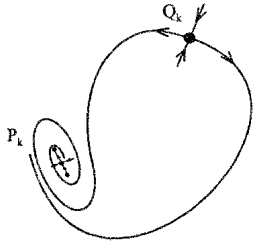


Рис. 8. После удвоения периода замыкание неустойчивого многообразия седловой неподвижной точки уже не гомеоморфно окружности.

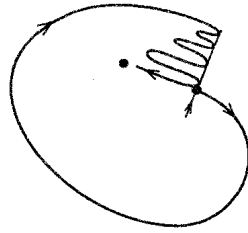


Рис. 9. Разрушение замкнутой инвариантной кривой: одна из компонент неустойчивого многообразия седловой неподвижной точки касается ее устойчивого многообразия.

В действительности в области выше кривых B_{tk}^1 и B_{tk}^2 возможно сосуществование устойчивой точки P_k и с устойчивыми периодическими точками других периодов: так как гомоклинические касания, отвечающие кривым B_{tk}^1 и B_{tk}^2 , невырождены (квадратичны), то согласно [20] выше этих кривых на плоскости параметров есть области Ньюхауса, в которых для плотного множества значений параметров система имеет одновременно счетное множество устойчивых периодических движений. Как следует из [21] (см. также [29] для многомерного случая), здесь также будут существовать области гиперболичности, причем можно показать, что для значений параметров из этих областей устойчивая точка P_k будет единственным аттрактором.

Заметим, что в области синхронизации S_k выше кривых B_{tk}^1 и B_{tk}^2 синхронизация всегда *неполная*. Во-первых, здесь возможно существование, наряду с устойчивым периодическим движением L_k , отвечающим точке P_k , устойчивых периодических траекторий других периодов. Но даже если таких траекторий нет и L_k — единственный аттрактор, то для траекторий из гиперболического множества близки грубой гомоклинической траектории к седловой точке Q_k разности фаз с устойчивым периодическим движением L_k растут асимптотически линейно, т. е. десинхронизация наблюдается по крайней мере для переходного процесса.

Надо отметить, что для десинхронизации важен не хаос сам по себе, а наличие грубой гомоклинической траектории у седла Q_k . Так, в области $D_k \setminus S_k$ ниже кривых B_{tk}^1 и B_{tk}^2 , где у Q_k нет гомоклинических траекторий, разность фаз между любыми двумя траекториями всегда остается ограниченной, т. е. можно говорить об *относительной синхронизации*. При этом динамика может быть хаотической: так, в области выше кривой B_{tk}^0 точка P_k , которая уже потеряла устойчивость и стала седловой, имеет грубую гомоклиническую траекторию. На кривой B_{tk}^0 точка P_k имеет траекторию гомоклинического касания (рис. 10), причем это касание третьего класса, поэтому сложная динамика имеет место и ниже кривой B_{tk}^0 [10].

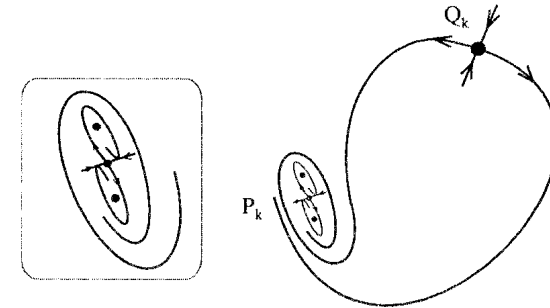


Рис. 10. Гомоклинические касания между неустойчивым и устойчивым многообразиями точки P_k .

Таким образом, в области D_k , отвечающей существованию периодического движения периода $2\pi k$, мы выделили области полной, неполной и относительной синхронизации. Режим десинхронизации, а также неполной синхронизации, т. е. сосуществование периодических траекторий различных чисел вращения, для значений параметров из области D_k всегда влечет сложную динамику. Кроме того, в области относительной синхронизации имеет место также и другой, «невращательный» тип хаотического поведения. Можно показать, что такая же картина поведения в резонансной области D_k имеет место не только для $f(\theta) = A \sin \theta$, но и в общем случае, для произвольной функции f .

Возникает вопрос: что происходит при выходе из зоны синхронизации S_k через границу B_k^2 или B_k^1 , т. е. при исчезновении седлоузла? Ответ существенно зависит от поведения неустойчивого многообразия седло-узла W^u . Выше точек M_k^1 и M_k^2 , в которых заканчиваются кривые B_{tk}^1 и B_{tk}^2 , отвечающие появлению гомоклинических

траекторий, неустойчивое многообразие седло-узла W^u имеет точки трансверсального пересечения с его сильно устойчивым многообразием W^{ss} (рис. 11).

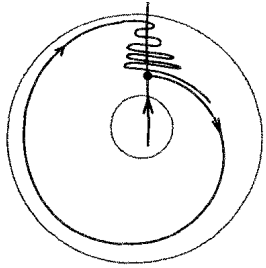


Рис. 11. Гомоклиническое пересечение неустойчивого и сильно устойчивого многообразий седло-узла.

сохраняется [18], т. е. при переходе через границы B_k^2 или B_k^1 выше точек M_k^1 и M_k^2 мы попадаем в область десинхронизации («вращательного» хаоса).

Как показано в [18], вблизи гомоклинической траектории, отвечающей этому пересечению, лежит нетривиальное гиперболическое множество, такое же, как вблизи трансверсальной гомоклинической траектории к грубому седлу. При переходе внутрь области D_k седло-узел разваливается на устойчивый узел и седло, при этом седло наследует гомоклиническую траекторию и гиперболическое множество сохраняется. При выходе из области D_k седло-узел исчезает, но большая часть гиперболического множества сохраняется [18], т. е. при переходе через границы B_k^2 или B_k^1 выше точек M_k^1 и M_k^2 мы попадаем в область десинхронизации («вращательного» хаоса).

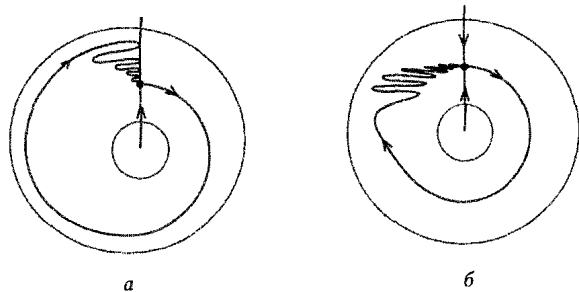


Рис. 12. Гомоклиническое касание между неустойчивым и сильно устойчивым многообразиями седло-узла (а). Складки на неустойчивом многообразии седло-узла сохраняются и после исчезновения гомоклинического касания (б).

Точки M_k^1 и M_k^2 отвечают касанию многообразий W^u и W^{ss} по негрубой гомоклинической траектории (рис. 12, а). При этом единственной предельной точкой траекторий из W^u служит сам седло-узел и W^u гомеоморфно окружности. Ниже этих точек многообразие W^u всегда возвращается к седло-узлу и лежит при этом

в узловой области. Оно по-прежнему гомеоморфно окружности. При этом при значениях параметров вблизи точек M_k^1 и M_k^2 складки на W^u сохраняются (рис. 12, б), т. е. оно не будет гладким многообразием (касательный вектор к W^u при подходе к седло-узлу со стороны узловой области осциллирует и не имеет предела). Это всегда так, пока W^u касается сильно устойчивого инвариантного слоя F^{ss} в какой-нибудь точке узловой области [22, 28]. Если же W^u пересекает слой F^{ss} трансверсально, то оно примыкает к седло-узлу уже гладким образом. Такая ситуация имеет место при достаточно малых A : здесь единственным аттрактором служит гладкая инвариантная замкнутая кривая, и на линиях $B_k^{1,2}$ она совпадает с W^u . Обозначим через M_k^{*1} и M_k^{*2} такие точки на кривых B_k^1 и B_k^2 соответственно, что ниже этих точек W^u примыкает к седло-узлу гладко, а выше — негладко.

Покажем, что при выходе из зоны полной синхронизации через кривые B_k^1 или B_k^2 ниже точек M_k^{*1} и M_k^{*2} соответственно устойчивая гладкая инвариантная замкнутая кривая сохраняется. На ней будет существовать либо плотная квазипериодическая траектория при иррациональных числах вращения, либо периодические траектории очень больших периодов при рациональных числах вращения. С практической точки зрения это означает, что мы будем иметь здесь двухчастотный режим, то есть биения. При выходе из зоны синхронизации по любому пути, пересекающему границы B_k^1 или B_k^2 выше точек M_k^{*1} и M_k^{*2} , мы либо сразу попадаем в зону хаотической динамики, либо интервалы значений параметра, отвечающие как хаосу, так и простой динамике, будут чередоваться. При этом первый случай всегда имеет место вблизи точек $M_k^{1,2}$ (в том числе и ниже этих точек), а второй вблизи точек M_k^{*1} и M_k^{*2} (выше их).

2. Исчезновение седло-узла

Задачу о глобальных бифуркациях при исчезновении седло-узла будем рассматривать здесь не в рамках отображений, а для систем в непрерывном времени. Дело в том, что в случае систем, не допускающих глобальной секущей, здесь возникают новые необычные явления, представляющие несомненный интерес для многих проблем нелинейной динамики.

Рассмотрим однопараметрическое семейство C^2 -гладких $(n+2)$ -мерных динамических систем, гладко зависящих от параметра μ , где $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. При $\mu = 0$ система имеет негрубое периодическое движение L_0 типа седло-узел. Это означает, что все мультипликаторы, кроме одного, равного 1, лежат внутри единичного круга и первая ляпуновская величина не равна нулю.

2. Все траектории неустойчивого многообразия W^u траектории L_0 стремятся к L_0 при $t \rightarrow \infty$, причём $W^u \cap W^{ss} = \emptyset$, т. е. W^u , когда возвращается к L_0 , целиком лежит в узловой области.

3. Рассматриваемое семейство трансверсально бифуркационному множеству систем с негрубым периодическим движением типа седло-узел. Это означает, в частности, что при изменении μ седло-узел бифурцирует: разваливается на седло и узел при, скажем, $\mu < 0$ и исчезает при $\mu > 0$.

Согласно [34], можно ввести координаты в малой окрестности траектории L_0 так, что система будет записываться в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu + x^2[1 + p(x, \theta, \mu)], \\ \dot{y} &= [A(\mu) + q(x, \theta, y, \mu)]y, \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (13)$$

где собственные числа матрицы A все лежат строго слева от мнимой оси. Здесь θ — циклическая переменная, определенная по модулю 1, при этом точка $(x, y, \theta = 0)$ подклеивается к точке $(x, \sigma y, \theta = 1)$, где σ — некоторая инволюция в R^n (см. [27]). Таким образом, p — функция периода 1 по θ и q — функция периода 2. При этом $p(0, \theta, 0) = 0$ и $q(0, \theta, 0) = 0$. Кроме того, данные координаты вводятся так, что p не зависит от θ при $\mu = 0$ (т. е. отображение Пуанкаре на центральном многообразии вложено в автономный поток [30]).

Седло-узловая периодическая траектория L_0 задается уравнением $x = 0, y = 0$ при $\mu = 0$. Ее сильно-устойчивое многообразие W^{ss} локально задается уравнением $x = 0$. Оно разделяет окрестность траектории L_0 на узловую и седловую области, $x < 0$ и $x > 0$ соответственно. Многообразие $y = 0$ инвариантно, это центральное многообразие. При $\mu < 0$ в нем лежат две периодические траектории L_1 и L_2 , одна устойчивая, а другая седловая, которые сливаются в одну траекторию L_0 при $\mu = 0$. При $\mu > 0$ периодических траекторий нет и все траектории покидают окрестность.

При $\mu = 0$ координата x монотонно возрастает. При этом $x(t) \rightarrow 0$ в области $x < 0$ при $t \rightarrow +\infty$, причем медленно, как $\sim 1/t$. Поскольку координата y экспоненциально убывает, то получаем, что все траектории в узловой области стремятся к L_0 при $t \rightarrow +\infty$, касаясь цилиндра $y = 0$. В седловой области $x(t) \rightarrow 0$ уже при $t \rightarrow -\infty$, и так как y экспоненциально возрастает с убыванием t , то множество траекторий,

которые стремятся к седло-узлу L_0 при $t \rightarrow -\infty$, т. е. его неустойчивое многообразие W^u имеет вид $\{y = 0, x \geq 0\}$.

С ростом t траектории из $W^u \setminus L_0$ покидают окрестность седло-узла, но в силу предположения 2 все они возвращаются в узловую область при $t \rightarrow +\infty$, т. е. стремятся к L_0 , касаясь цилиндра $y = 0$. Поэтому можно указать такое малое $d > 0$, что W^u будет пересекать секущую $S_0 : \{x = -d\}$. Очевидно, что $\bar{l} = W^u \cap S_0$ есть замкнутая кривая. Однако она может быть вложена в S_0 различным образом. Будем считать, что средняя линия $l_0 : \{y = 0\}$ секущей S_0 ориентирована в сторону возрастания θ , так же как и средняя линия $l_1 : \{y = 0\}$ секущей $S_1 : \{x = +d\}$. Так как $l_1 = W^u \cap S_1$, то кривая \bar{l} является образом кривой l_1 под действием отображения по траекториям системы, поэтому ориентация на l_1 определяет ориентацию на \bar{l} . Таким образом, с учетом ориентации кривая \bar{l} гомотопна ml_0 , где $m \in Z$. В случае $n = 1$, т. е. когда система задана в R^3 и S_0 — двумерное кольцо, возможны только два случая: $m = 0$ и $m = +1$. В случае же $n \geq 2$ допустимы любые целые m . Поведение W^u в случае $m = 0$ изображено на рис. 13, а. В случае $m = 1$ многообразие W^u гомеоморфно тору (рис. 13, б), а в случае $m = -1$ — бутылке Клейна (рис. 13, в). В случае $|m| \geq 2$ множество W^u является $|m|$ -ветвленным многообразием (к каждой точке траектории L_0 со стороны узловой области подклеиваются $|m|$ кусков множества W^u). Заметим также, что в задаче о воздействии периодической внешней силы на автоколебательную систему, как, например, в системе (4), может реализовываться только случай $m = 1$, независимо от размерности.

Изучение поведения траекторий в окрестности множества W^u представляет интерес только при $\mu > 0$ (при $\mu \leq 0$ оно тривиально). При $\mu > 0$ эта задача сводится к изучению отображения Пуанкаре $T : S_1 \rightarrow S_1$, которое будем строить в виде суперпозиции двух отображений: $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ и $T_0 : S_0 \rightarrow S_1$.

Как показано в [34], когда система приведена к виду (13) и функция p не зависит от θ при $\mu = 0$, отображение $T_0 : (y_0, \theta_0) \in S_0 \mapsto (y_1, \theta_1) \in S_1$ имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha(y_0, \theta_0, \nu), \\ \theta_1 &= \theta_0 + \nu + \beta(\theta_0, \nu), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\nu(\mu)$ — время перехода с S_0 на S_1 . При $\mu \rightarrow +0$ время перехода ν монотонно стремится к бесконечности: $\nu \sim 1/\sqrt{\mu}$; при этом функции α и β равномерно стремятся к нулю вместе со всеми своими производными. Таким образом, образ секущей S_0 под действием отображения T_0 сжимается к средней линии l_1 при $\mu \rightarrow +0$.

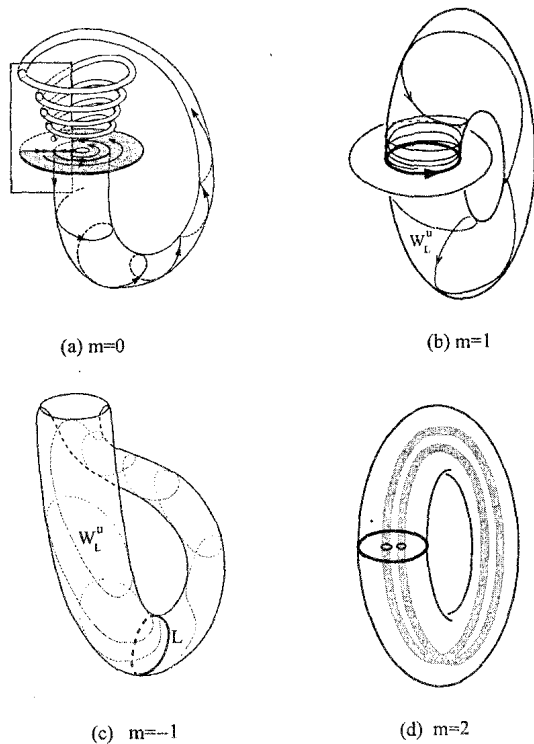


Рис. 13. Случай $m = 0$ — «катастрофа голубого неба» (a). Случай $m = 1$ и $m = -1$ (замыкание неустойчивого многообразия седло-узловой периодической траектории) являются двумерным тором (b) или бутылкой Клейна (c) соответственно. Случай $m = 2$ — полноторий S_1 растягивается в два раза в направлении угловой переменной, сжимается в поперечном направлении и вкладывается сам в себя, образуя в пределе соленоид Виеториса — Ван Данцига (d).

Отображение $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ — это отображение по траекториям за конечное время, следовательно, это гладкое отображение, определенное при всех малых μ . Оно записывается в виде

$$\begin{aligned} y_0 &= G(y_1, \theta_1, \mu), \\ \theta_0 &= F(y_1, \theta_1, \mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Образ линии l_1 будет, следовательно, иметь вид

$$y_0 = G(0, \theta_1, 0), \quad \theta_0 = F(0, \theta_1, 0). \quad (16)$$

На второе уравнение можно смотреть как на отображение одной о-

ружности в другую. Его можно записать в виде

$$\theta_0 = m\theta_1 + f(\theta_1), \quad (17)$$

где $f(\theta)$ — периодическая функция периода 1, а степень отображения m есть как раз то самое целое число, о котором говорилось выше.

В силу (14), (15), (17) отображение Пуанкаре $T = T_0 T_1 : S_1 \rightarrow S_1$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{y} &= g_1(y, \theta, \nu), \\ \bar{\theta} &= m\theta + \nu + f(\theta) + f_1(y, \theta, \nu), \end{aligned} \quad (18)$$

где функции f_1 и g_1 стремятся к нулю при $\nu \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными. Таким образом, мы видим, что если мы зафиксируем дробную часть ν , то при стремлении целой части ν к бесконечности отображение T вырождается в отображение окружности \tilde{T} :

$$\tilde{\theta} = m\theta + f(\theta) + \nu \pmod{1}. \quad (19)$$

Понятно, что во многом динамика отображения (18) определяется свойствами отображения (19). Значениям ν с одинаковой дробной частью отвечает одно и то же отображение \tilde{T} . Тем самым область изменения малого параметра $\mu > 0$ представляется в виде объединения счетной последовательности отрезков $J_k = [\mu_{k+1}, \mu_k]$ (где $\nu(\mu_k) = k$) таких, что поведение отображения T на каждом из отрезков J_k в целом одинаково.

Прежде всего остановимся на двух замечательных случаях $m = 0$ и $|m| \geq 2$, рассмотренных в [32, 33, 34, 28].

Теорема [32, 34]. При $m = 0$, если $|f'(\theta)| < 1$ при всех θ , то отображение T при всех достаточно малых μ будет иметь единственную, притом устойчивую, неподвижную точку.

После того как отображение T приведено к виду (18), утверждение теоремы непосредственно следует из принципа сжимающих отображений. Из теоремы следует, что при исчезновении L_0 в этом случае появляется единственная и устойчивая периодическая траектория, длина и период которой стремятся к бесконечности при $\mu \rightarrow +0$ — как говорят, имеет место «катастрофа голубого неба». Вопрос о возможности неограниченного увеличения длины периодической траектории при приближении к моменту бифуркации был поставлен в [24]; первый пример (бесконечной коразмерности) был построен в [19]. Наша конструкция дает «катастрофу голубого неба» при бифуркации коразмерности 1. Отметим также, что, как показано в [28, 25], наш вариант «катастрофы голубого неба» описывает поведение, типичное

для сингулярно-возмущенных систем с как минимум двумя быстрыми переменными. Пример системы с явно выписанными правыми частями, в которой реализуется ситуация данной теоремы, был впервые построен в [11]. Приложение нашей конструкции к конкретным моделям нейронной динамики приведено в [38].

Теорема [32, 33]. Пусть $|m| \geq 2$ и $|m + f'(\theta)| > 1$ при всех θ . Тогда при всех достаточно малых $\mu > 0$ отображение T будет иметь гиперболический аттрактор Смейла — Вильямса.

В этих условиях отображение T действует таким же образом, как и в конструкции Смейла — Вильямса. Именно полноторий S_0 отображается сам в себя так (см. рис. 13, *d*), что предел $\Sigma = \bigcap_{k \geq 0} T^k S_0$ является соленоидом Виеториса — Ван Данцига, локально гомеоморфным прямому произведению канторовского множества на отрезок. Условия теоремы гарантируют равномерное растяжение по θ и сжатие по y , т. е. аттрактор Σ — равномерно-гиперболическое множество, и более того, так как отображение $T|_{\Sigma}$ топологически сопряжено пределу обратного спектра для растягивающего отображения окружности (степени $|m|$), то все точки Σ — неблуждающие, т. е. мы действительно имеем здесь гиперболический аттрактор [32, 33].

Как мы уже отмечали, в случае $m = \pm 1$ поверхность W^u при $\mu = 0$ может примыкать к седло-узлу L_0 как гладким, так и негладким образом, в зависимости от того, как W^u пересекает сильно устойчивое инвариантное слоение F^{ss} в узловой области. Когда система приведена к виду (13), слои этого слоения имеют вид $\{x = \text{const}, \theta = \text{const}\}$, т. е. на секущей S_0 слои F^{ss} имеют вид $\{\theta_0 = \text{const}\}$. Пересечение $W^u \cap S_0$ — это кривая (16). Следовательно (см. выражение (17)), W^u примыкает к L_0 гладко тогда и только тогда, когда

$$m + f'(\theta) \neq 0 \quad (20)$$

при всех θ . Это условие эквивалентно тому, что предельное отображение \tilde{T} (19) — диффеоморфизм окружности при всех ν .

Теорема [1]. Если \tilde{T} — диффеоморфизм, то при всех достаточно малых $\mu > 0$ отображение (18) будет иметь замкнутую устойчивую гладкую инвариантную кривую, к которой притягиваются все траектории.

Доказательство теоремы достигается ссылкой на принцип коши [3, 27]. Заметим, что гладкой замкнутой инвариантной кривой отображения Пуанкаре T отвечает в случае $m = 1$ двумерный инвариантный тор исходной системы, а при $m = -1$ — инвариантная гладкая бутылка Клейна.

В случае, когда отображение \tilde{T} не является диффеоморфизмом, ситуация намного сложнее. Мы оставим случай $m = -1$ в стороне, а основное внимание обратим на $m = 1$. Именно этот случай, как мы отмечали, характерен для задачи синхронизации.

Таким образом, мы предполагаем, что $m = 1$ и что предельное отображение \tilde{T} имеет критические точки. Основные результаты для этого случая содержатся в трех теоремах ниже.

Введем величину δ , определяемую как

$$\delta = \sup_{\theta_1 < \theta_2} (\theta_1 + f(\theta_1) - \theta_2 - f(\theta_2)).$$

Очевидно, что $\delta = 0$ тогда и только тогда, когда отображение \tilde{T} — гомеоморфизм при всех ν , т. е. когда его график — неубывающая функция. Если $\delta > 0$, то это отображение обязательно имеет по крайней мере одну точку максимума и одну точку минимума; по существу, δ измеряет размах колебания между минимальным значением правой части отображения (17) и предшествующим ему максимальным значением (рис. 14). Несложно подсчитать, что в случае $f = A \sin 2\pi\theta$, например, $\delta(A) = \frac{1}{\pi} (\sqrt{4\pi^2 A^2 - 1} - \arctan \sqrt{4\pi^2 A^2 - 1})$.

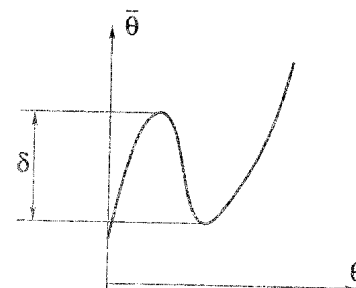


Рис. 14. Величина δ равна модулю разности между некоторым минимальным значением правой части отображения и предшествующим ему максимальным значением.

В случае $\delta \geq 1$ у каждого значения θ есть по крайней мере три прообраза относительно отображения (17). В терминах исходной системы легко видеть, что мы имеем $\delta > 0$ тогда и только тогда, когда некоторый слой слоения F^{ss} имеет более одного (на самом деле, по крайней мере, три) пересечения с неустойчивым многообразием седло-узла W^u при $\mu = 0$, и $\delta \geq 1$ тогда и только тогда, когда W^u пересекает каждый слой слоения F^{ss} по крайней мере трижды.

Заимствуя терминологию из [1], будем называть случай $\delta > 1$ случаем большой петли.

Теорема [31]. В случае большой петли отображение T имеет сложную динамику при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Под сложной динамикой следует понимать наличие грубой гомоклинической траектории к грубому периодическому движению. Это влечет существование гиперболического множества, т. е. в малой окрестности гомоклинической структуры все траектории (их континуум), включая счетное множество периодических движений, являются седловыми и допускают полное символическое описание на языке топологической марковской цепи.

Хотя такая структура и грубая, т. е. гиперболическое множество сохраняется при малых изменениях μ , мы не можем, вообще говоря, ожидать, что одно и то же гиперболическое множество будет сохраняться при всех μ , т. е. следует иметь в виду, что различным интервалам значений μ в теореме могут отвечать различные гиперболические множества.

Теорема [31]. Если $\delta > 0$ в отображении (19) и все критические точки отображения имеют конечный порядок, то сколь угодно близко к $\mu = 0$ имеются интервалы значений μ , при которых отображение T имеет сложную динамику.

Теорема [31]. Если $2\delta \max_{\theta} f''(\theta) < 1$, то сколь угодно близко к $\mu = 0$ имеются интервалы значений μ , при которых отображение T имеет простую динамику: все траектории стремятся к непрерывной инвариантной кривой, гомеоморфной окружности, на которой имеется конечное число неподвижных точек (половина из них устойчивы, половина — седловые).

Таким образом, в противоположность случаю большой петли при малых $\delta > 0$ интервалы простой и сложной динамики чередуются при $\mu \rightarrow 0$.

3. Заключение

Как мы видим, классические задачи синхронизации сводятся к изучению семейств отображений кольца вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= G(x, \theta, \mu), \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega + Af(\theta) + F(x, \theta, \mu) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (21)$$

где f , F и G — периодические по θ функции с периодом 1, причём функции F и G равномерно стремятся к нулю вместе со всеми своими

производными при $\mu \rightarrow 0$. Естественно, что динамика отображения (21) связана с поведением отображения окружности

$$\bar{\theta} = \theta + \omega + Af(\theta) \pmod{1}. \quad (22)$$

При малых A это отображение является диффеоморфизмом, но с ростом A у него появляются критические точки, определяемые из уравнения

$$1 + Af'(\theta) = 0.$$

Пусть $A = A^*$ отвечает появлению первой критической точки (точки перегиба) и $A > A^{**} > A^*$ отвечает выполнению условий большой петли. Как мы видели, при $A < A^*$ отображение (21) будет при всех ω иметь гладкую инвариантную кривую, а при $A > A^{**}$ оно при всех ω будет иметь сложную динамику.

При $A^* < A < A^{**}$ мы можем гарантировать сложную динамику только в определенных интервалах значений ω , и эти интервалы могут чередоваться с интервалами простой динамики. Во всяком случае, такое чередование имеет место, когда $A - A^*$ достаточно мало.

Заметим, что при $A = A^*$ отображение (21), хотя и имеет точки перегиба, является гомеоморфизмом окружности, т. е. для него определено число вращения Пуанкаре $r(\omega)$. Как правило, для таких отображений (в противоположность диффеоморфизмам окружности) множество значений ω , отвечающих иррациональным числам вращения, образует множество меры нуль. Таким образом, типичным образом переход из области $A < A^*$ в область $A > A^*$ осуществляется внутри какой-нибудь резонансной зоны, отвечающей рациональному числу вращения. Внутри такой зоны при $A = A^*$ мы имеем на окружности конечное число периодических точек (половина устойчивых, половина неустойчивых). Ясно, что эта структура сохраняется при малых μ и при всех близких значениях A и ω , т. е. внутри резонансной зоны отображение (21) действительно будет иметь простую динамику при A , близких к A^* . Основные бифуркации, которые происходят в резонансной зоне с увеличением A , такие же, как описано в разделе 1: бифуркационные кривые, отвечающие гомоклиническим касаниям и удвоению периода, разбивают резонансную зону на области синхронизации (полной, частичной, относительной) и вращательного хаоса (см. рис. 6).

Границы резонансной зоны отвечают бифуркации седло-узла. Как следует из результатов предыдущего раздела, выходя из резонансной зоны в области $A > A^*$, всегда можно попасть в интервалы сложной динамики. Отсюда, в частности, вытекает, что на плоскости параметров (A, ω) при $A > A^*$ в любой окрестности любой точки

(A^*, ω) с иррациональным $r(\omega)$ имеются как области простой, так и области сложной динамики, в отличие от случая рационального $r(\omega)$.

Надо отметить, что в случае, когда функции F и G в отображении (21) не малы, а особенно когда отображения (21) уже не сжимают площади, т. е. задача становится более многомерной по существу, ситуация значительно усложняется. В частности, кроме бифуркаций седло-узла и удвоения периода здесь может встречаться бифуркация периодической траектории с парой комплексно сопряженных мультипликаторов на единичной окружности. Более того, когда соответствующая бифуркационная кривая выходит на границу области синхронизации, мы получаем периодическую траекторию с мультипликаторами $(1, e^{\pm i\varphi})$. Известно, что локальные бифуркации такой траектории (аналогичные бифуркациям состояния равновесия с характеристическими показателями $(0, \pm i\omega)$ [9, 12]) очень нетривиальны. Более того, на границе области синхронизации данная периодическая траектория должна иметь гомоклинику, таким образом, необходимо изучать также и глобальные бифуркации такой траектории. Заметим, что эта задача рассматривалась в связи с примером «катастрофы голубого неба» в [11]; в связи с задачей синхронизации подобное явление было замечено в [37]. Очевидно, что другие случаи коразмерности два $-(\pm 1, \pm 1)$, $(-1, e^{\pm i\varphi})$ — с гомоклиническими траекториями также нуждаются в дополнительном анализе.

Эта работа частично поддержана грантом CRDF RU-M1-2583 MO-04, грантом РФФИ № 02-01-00273, научной программой «Российские университеты», проект UR 03.01.015. Л. П. Шильников также благодарит фонд А. Гумбольта.

Литература

1. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О глобальных бифуркациях связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // ДАН СССР. 1974. Т. 219. С. 1281—1284.
2. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О малых периодических возмущениях автономных систем // ДАН СССР. 1974. Т. 214. С. 739—747.
3. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Принцип кольца и взаимодействие двух автоколебательных систем // ПММ. 1977. Т. 41. С. 618—627.
4. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 3—26.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов и петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Математический сборник. 1959. Т. 48. С. 335—376.

6. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1968.
7. Andronov A. A., Vitt A. A. Zur Theorie des Mithnehmens von van der Pol // Archiv für Elektrotechnik. 1930. Bd. 24. S. 99.
8. Cartwright M. L., Littlewood J. E. On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large // J. Lond. Math. Soc. 1945. V. 20. P. 180—189.
9. Гаврилов Н. К. О бифуркациях состояния равновесия с одним нулевым и парой чисто мнимых корней // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во ГГУ, 1978. С. 33—40.
10. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I // Математический сборник. 1972. Т. 88. С. 475—492.
11. Gavrilov N. K., Shilnikov A. L. An example of blue sky catastrophe // Methods of qualitative theory of differential equations and related topics. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2000. V. 200. Adv. Math. Sci. Providence, RI. P. 165—188.
12. Guckenheimer J. On a codimension two bifurcation // Lect. Notes Math. 1981. V. 898. P. 99—142.
13. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Фундаментальные проблемы нелинейной механики // ДАН СССР. 1933. Т. 4. С. 475—498.
14. Levi M. Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations // Mem. Amer. Math. Soc. 1981. V. 32. P. 1—146.
15. Levinson N. A second order differential equation with singular solutions // Ann. Math. 1949. V. 2. P. 127—153.
16. Littlewood J. E. On non-linear differential equations of the second order. III. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b?k \cos(?t + \alpha)$ for large k , and its generalizations // Acta Math. 1957. V. 97. P. 267—308.
17. Littlewood J. E. On non-linear differential equations of the second order. IV. The general equation $\ddot{y} + kf(y)\dot{y} + g(y) = bk\varphi(\phi)$, $\phi = t + \alpha$ // Acta Math. 1957. V. 98. P. 1—110.
18. Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами // ДАН СССР. 1978. Т. 243. С. 26—29.
19. Медведев В. С. О новом типе бифуркаций на многообразиях // Математический сборник. 1980. Т. 113. С. 487—492.
20. Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms // Publ. Math. IHES. 1979. V. 50. P. 101—151.
21. Newhouse S., Palis J. Cycles and bifurcation theory // Asterisque. 1976. V. 31. P. 44—140.
22. Newhouse S., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publ. Math. IHES. 1983. V. 57. P. 5—71.
23. Осипов А. В. Гиперболичность основного семейства для уравнения Левинсона // Дифференц. уравн. 1975. Т. 11. С. 1795—1800.

24. *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Lect. Notes Math. 1975. V. 486. P. 334–353.
25. *Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems // Moscow Math. J. 2004 (in print).
26. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре — Биркгофа // Математический сборник. 1967. Т. 74. С. 378–397.
27. *Shilnikov L., Shilnikov A., Turaev D., Chua L.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I. Singapore: World Scientific, 1998.
28. *Shilnikov L., Shilnikov A., Turaev D., Chua L.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part II. Singapore: World Scientific, 2001.
29. *Стенькин О. В., Шильников Л. П.* Гомоклинический Ω -взрыв и области гиперболичности // Математический сб. 1998. Т. 189. С. 125–144.
30. *Takens F.* Singularities of vector fields // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 47–100.
31. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Бифуркации квазиаттракторов тор-хаос // Математические механизмы турбулентности. Киев: Наукова думка, 1986. С. 113–121.
32. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О катастрофах голубого неба // Доклады РАН. 1995. Т. 342. С. 596–599.
33. *Shilnikov L. P., Turaev D. V.* On simple bifurcations leading to hyperbolic attractors // Comput. Math. Appl. 1997. V. 34. P. 441–457.
34. *Shilnikov L. P., Turaev D. V.* A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type // Methods of qualitative theory of differential equations and related topics: Amer. Math. Soc. Transl. 2000. II Ser. 200, AMS, Providence, RI. P. 165–188.
35. *B. van der Pol.* Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (receptance with reactive triode) // London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 1927. V. 3. P. 65–80.
36. *B. van der Pol, van der Mark.* Frequency demultiplication // Nature 1927. V. 120. P. 363–364.
37. *Krauskopf B., Wicczorek S.* Accumulating regions of winding periodic orbits in optically driven lasers // Physica D. 2002. V. 173. P. 114–129.
38. *Shilnikov A. L., Cymbaluk G.* Homoclinic saddle-node orbit bifurcations en route between tonic spiking and bursting in neuron models // Regular & Chaotic Dynamics. 2004. V. 9, № 3. P. 281–297.