

ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ СЕДЛА

Д. В. Тураев

Рассмотрим двухпараметрическое семейство C^2 -гладких динамических систем S_μ , заданных на C^k -гладком ($k \geq 2$) n -мерном многообразии. Предположим, что векторное поле S_μ вместе со своими производными по фазовым переменным гладко зависит от $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ и имеет простое состояние равновесия O типа седло. Пусть $\lambda_i(\mu)$ - корни характеристического уравнения системы в точке O ($i = 1, \dots, n$). Будем предполагать, что $\lambda_n(\mu) > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_i(\mu) < \lambda_1(\mu) < 0$ ($i = 2, \dots, n-1$). В этом случае устойчивое многообразие W^S седла $(n-1)$ -мерно, а неустойчивое W^U -одномерно; причем на W^S существуют ведущее направление и $(n-2)$ -мерное неведущее многообразие, разбивающее W^S на две компоненты. Пусть при $\mu = 0$ обе выходящие из седла траектории $(\Gamma_1$ и $\Gamma_2)$ возвращаются в седло при $t \rightarrow +\infty$, т.е. являются гомоклиническими кривыми седла, причем Γ_1 и Γ_2 входят в седло, касаясь ведущего направления, по разные стороны от неведущего многообразия. Будем считать, что параметры μ_1 и μ_2 таковы, что при $\mu_j = 0$ существует гомоклиническая кривая седла, гомотопная Γ_j в малой окрестности V контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O$. Предположим также, что седловая величина $\sigma = \lambda_1 + \lambda_n$ и так называемые сепаратрисные величины A_1 и A_2 [2,3] отличны от нуля.

Введем в окрестности точки O координаты $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y$ так, что локально W^U будет задаваться уравнениями $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, W^S - уравнением $y = 0$, неведущее многообразие - уравнениями $x_1 = 0, y = 0$, ведущее направление будет совпадать с осью x_1 , Γ_1 при пересечении с окрестностью будет лежать в области $x_1 \geq 0, y \geq 0$, Γ_2 - в области $x_1 \leq 0, y \leq 0$ (это всегда можно сделать). Выберем малое $d > 0$ и построим секущие к W^S : $\pi_i: x_i = d$ и

$\tilde{\pi}_2: x_1 = -d$. При малых μ определено отображение T_μ окрестности точек $(d, 0, \dots, 0)$ и $(-d, 0, \dots, 0)$ множества $\tilde{\pi}_1 \cup \tilde{\pi}_2$ в $\tilde{\pi}_1 \cup \tilde{\pi}_2$ по траекториям системы S_μ . Обозначим $x = (x_2, \dots, x_{n-1})$. Пусть $T_\mu: (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$. Известно [1, 2], что если $(x, y) \in \tilde{\pi}_i$ ($i = 1, 2$), то если $y > 0$, то $(\bar{x}, \bar{y}) \in \tilde{\pi}_1$, причем

$$\bar{y} = y_1^*(\mu) + (-1)^{i-1} (A_1 + g_{i1}(x, y, \mu)) y^{|\lambda_1(\mu)/\lambda_n(\mu)|}, \quad (1a)$$

$$\bar{x} = x_1^*(\mu) + f_{i1}(x, y, \mu) y^{|\lambda_1(\mu)/\lambda_n(\mu)|}.$$

а если $y < 0$, то $(\bar{x}, \bar{y}) \in \tilde{\pi}_2$, причем

$$\bar{y} = y_2^*(\mu) + (-1)^{i-1} (A_2 + g_{i2}(x, y, \mu)) (-y)^{|\lambda_1(\mu)/\lambda_n(\mu)|}, \quad (1b)$$

$$\bar{x} = x_2^*(\mu) + f_{i2}(x, y, \mu) (-y)^{|\lambda_1(\mu)/\lambda_n(\mu)|}.$$

Здесь f_{ij}, g_{ij} - гладкие функции x, y, μ , причем $\lim_{y \rightarrow 0} g_{ij} = 0$, x_j^*, y_j^* - гладкие функции μ . В дальнейшем будем предполагать, что управляющие параметры μ_1 и μ_2 выбраны так, что $\mu_1 = y_1^*(\mu)$, $\mu_2 = y_2^*(\mu)$.

Возможны различные комбинации знаков A_1 и A_2 :

- 1) $A_1 > 0, A_2 > 0$ - ориентируемый случай,
- 2) $A_1 < 0, A_2 > 0$ - полуориентируемый случай,
- 3) $A_1 < 0, A_2 < 0$ - неориентируемый случай.

Рассмотрим $V \cap W^S$. Если $n = 3$, то $V \cap W^S$ в случае 1) - объединение пары цилиндров, склеенных по неведущему многообразию, в случае 2) - объединение цилиндра и листа Мебиуса, в случае 3) - объединение пары листов Мебиуса [2, 3].

Назовем циклом типа $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ ($j_k = 1$ или 2) периодическую траекторию, лежащую в V и гомотопную в V произведению $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$.

Т е о р е м а . Существует окрестность V контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup O$ и окрестность точки $(0,0)$ $U \subset R^2$, что при $\mu \in U$ у S_μ в V существует не более двух периодических траекторий, устойчивых при $\sigma < 0$ и седловых (если $n = 2$ - неустойчивых) при $\sigma > 0$. В случае I могут быть только циклы типов $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{12\}$, в случае 2 - только типов $\{1\}$, $\{2\}$, $\{12\}$ и $\{121\}$, в случае 3 - только типов $\{1\}$, $\{2\}$, $\{12\}$, $\{(12)^2, 1\}$, $\{(21)^2, 2\}$ *) ($1 \leq 2 < \infty$).

В зависимости от знаков A_1, A_2 имеет место одна из бифуркационных диаграмм, приведенных на рис. 1-3. Точки бифуркационных кривых отвечают наличию гомоклинических траекторий к седлу. Уравнения этих кривых имеют вид $\mu_1 = h(\mu_2)$ или $\mu_2 = h(\mu_1)$, где h - функции с константой Липшица меньшей единицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим отображение T_μ . Из (I.a), (I.б) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \right) / \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \right\| / \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\|$$

существует и конечен, $\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| = 0$, если $\sigma < 0$, а если $\sigma > 0$, то $\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| = \infty$. Отсюда существуют такие L и

$$*) (12)^2 = \underbrace{1212, \dots, 12}_2 \text{ раз}$$

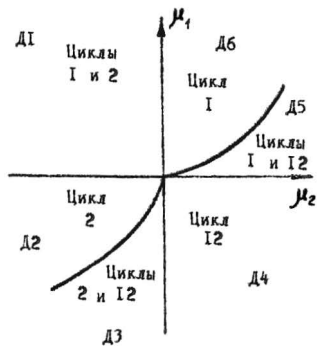


Рис. 1

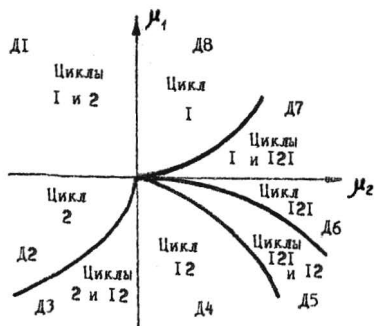


Рис. 2

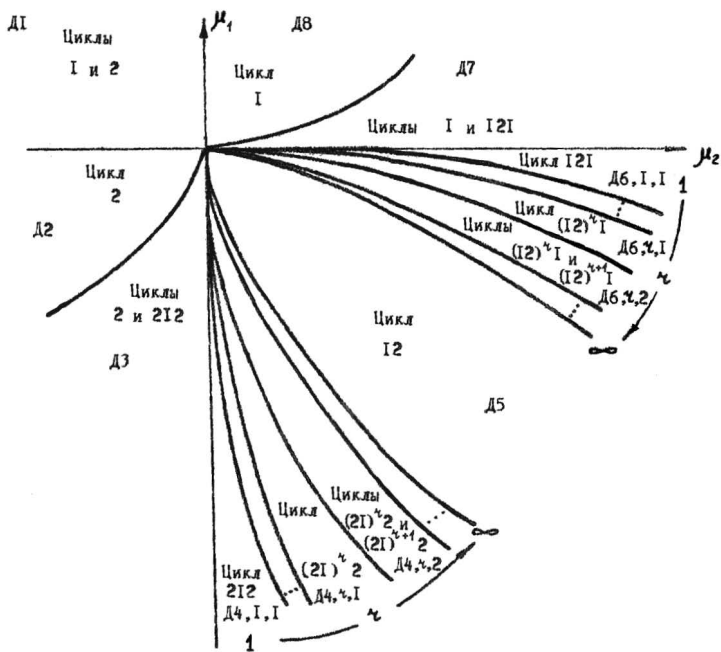


Рис. 3

сколь угодно малое N , что при достаточно малых x, y, μ имеют место неравенства

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| + L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| + \frac{1}{L} \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \right\| \leq \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| + L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \leq N.$$

Если $\sigma < 0$, то $\left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| + L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \leq N$, а если $\sigma > 0$, то $\left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| - L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \geq \frac{1}{N}$. T_μ определено на малой окрестности точки $(d, 0, 0)$ в π_1 и точки $(-d, 0, 0)$ в π_2 . Доопределим его на областях $\pi_{11} = \{x_1 = d, 0 < y < +\infty, \|x\| \leq d\}$, $\pi_{12} = \{x_1 = d, -\infty < y < 0, \|x\| \leq d\}$, $\pi_{21} = \{x_1 = -d, 0 < y < +\infty, \|x\| \leq d\}$, $\pi_{22} = \{x_1 = -d, 0 > y > -\infty, \|x\| \leq d\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) $T_\mu(\pi_{ij}) \subset \pi_{j1} \cup \pi_{j2}$ ($i, j = 1, 2$); б) существуют точки $M_i \in \pi_{i1} \cup \pi_{i2}$ ($i = 1, 2$) такие, что $\lim_{y \rightarrow 0} T_\mu(x, y) = M_1$, $\lim_{y \rightarrow -0} T_\mu(x, y) = M_2$; в) $T_\mu(\pi_{1j})$ и $T_\mu(\pi_{2j})$ лежат по разные стороны от плоскости $y = \mu_j$, проходящей через μ_j ;
 г) $\lim_{y \rightarrow \infty} \bar{y} = \infty$, д) T_μ гладко при $y \neq 0$, и существуют такие $N < 1$ и L , что для всех x, y, μ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| + L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| + \frac{1}{L} \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \right\| \leq \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| \text{ и } \left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\| + L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \leq N < 1;$$

е) T_μ гладко зависит от μ , и существует такое K , что для всех x, y, μ выполняется $\left\| \frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} \right\| \leq K, \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial \mu} \right\| \leq K$;
 ж) если $\sigma < 0$, то $\left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| + L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \leq N < 1$, а если $\sigma > 0$, то $\left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right\| - L \left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right\| \geq \frac{1}{N} > 1$.

Стандартным применением принципа сжимающих отображений устанавливается, что у отображения T_μ , удовлетворяющего условиям

а) - е), существует притягивающее инвариантное множество: пара кривых $\ell_1 \subset \pi_{11} \cup \pi_{12}$ и $\ell_2 \subset \pi_{21} \cup \pi_{22}$, определяемых уравнениями вида $x = h_\mu(y)$, где функции h_μ определены при всех $y \in (-\infty, +\infty)$, липшицевы с константой L по y и липшицевы по μ .

Введем отображение $\varphi_\mu: \bar{y} = \varphi_\mu(y)$, если $T_\mu: (h_\mu(y), y) \rightarrow (h_\mu(y), y)$. Пусть $\ell_{ij} = \ell_i \cap \pi_{ij}$ и φ_{ij} - ограничение φ_μ на ℓ_{ij} . Из свойств отображения T_μ получаем: 1) $\varphi_{ij}(\ell_{ij}) \subset \ell_j$; 2) $\varphi_{11}(0) = \varphi_{21}(0)$, $\varphi_{12}(0) = \varphi_{22}(0)$; 3) все φ_{ij} непрерывны и монотонны; в ориентируемом случае φ_{11} , φ_{22} - возрастающие, а φ_{12} и φ_{21} - убывающие функции y ; в полуориентированном случае φ_{11} и φ_{12} - убывающие, а φ_{21} , φ_{22} - возрастающие; в неориентируемом случае φ_{11} и φ_{22} - убывающие, а φ_{12} и φ_{21} - возрастающие. Из свойства ж) отображения T_μ несложно вывести, что: 4) либо все φ_{ij} - сжимающие отображения $\|\Delta \varphi_{ij}\| \leq N \|\Delta y\|$ (в случае $\sigma < 0$), либо все φ_{ij} - растягивающие отображения $\|\Delta \varphi_{ij}\| \geq \frac{1}{N} \|\Delta y\|$ (в случае $\sigma > 0$). Из соотношений (I.a) и (I.б) можно извлечь, что: 5) $\varphi_{ij}(y) = \mu_j + \psi_{ij}(\mu, y)$, где $\psi_{ij}(\mu, 0) = 0$ и ψ_{ij} - липшицева функция μ , причем за счет малости x, y, μ константа Липшица M может быть сделана сколь угодно малой. Будем считать, что $M + N < 1/3$.

Периодическим точкам отображения T_μ (а значит, периодическим траекториям системы S_μ) взаимно однозначно соответствуют периодические точки отображения φ_μ ; циклу типа $\{j_1 j_2 \dots j_m\}$ - неподвижная точка композиции отображений $\varphi_{j_m j_1} \varphi_{j_{m-1} j_m} \dots \varphi_{j_1 j_2}$, устойчивая неподвижная точка - устойчивому циклу, неустойчивая - седловому. Таким образом, задача сводится к изучению одномерного

отображения φ_{μ} , удовлетворяющего условиям I - 5.

Рассмотрим случай, когда все φ_{ij} - сжимающие отображения.

I) φ_{11} и φ_{22} - возрастающие, φ_{12} и φ_{21} - убывающие (бифуркационная диаграмма приведена на рис. I). Имеем $\mu_1 = \varphi_{11}(0) = \varphi_{21}(0)$, $\mu_2 = \varphi_{22}(0) = \varphi_{12}(0)$.

Пусть сначала $\mu_2 < 0$. Если $y \in \ell_{22}$, то $\varphi_{22}(y) < \varphi_{22}(0) = \mu_2 < 0$, значит, $\varphi_{22}(\ell_{22}) \subset \ell_{22}$, а так как φ_{22} - сжимающее отображение, то у φ_{22} на ℓ_{22} есть устойчивая единственная неподвижная точка y^* - цикл типа $\{2\}$. Траектории, которые не стремятся к y^* , обязательно попадают на ℓ_1 . Если $y \in \ell_1$ и $\varphi_{12}^{-1}(0) < y < 0$, то $\varphi_{12}(y) < 0$ и траектория точки y стремится к y^* . Если $y < \varphi_{12}^{-1}(0)$ или $y > 0$, то траектория y возвращается на ℓ_1 в точку \bar{y}

$$\bar{y} = \begin{cases} \varphi_{11}(y) & \text{при } y > 0 \\ \varphi_{21}\varphi_{12}(y) & \text{при } y < \varphi_{12}^{-1}(0) \end{cases}$$

\bar{y} монотонно возрастает, причем $\varphi_{12}^{-1}(0) = \varphi_{21}(0) = \mu_1 = \varphi_{11}(0) = \bar{0}$.

а) $\mu_1 > 0$ (см. рис. I - область II). График \bar{y} приведен на рис. 4, а. Есть одна неподвижная точка отображения $\varphi_{11} - y^{**}$ - это цикл типа $\{1\}$. Остальные траектории либо стремятся к y^{**} , либо попадают в $(\varphi_{12}^{-1}(0), 0)$ - область притяжения y^* , так что других периодических точек нет.

б) $\mu_1 < 0$. Если $\varphi_{12}^{-1}(0) < \mu_1$, то график \bar{y} таков, как на рис. 4, б. Все траектории попадают в $(\varphi_{12}^{-1}(0), 0)$, y^* - единственная периодическая точка φ_{μ} . Если $\mu_1 < \varphi_{12}^{-1}(0)$, то график \bar{y} таков, как на рис. 4, в. Появилась неподвижная точка отображения $\varphi_{21}\varphi_{12}$ - это цикл типа $\{12\}$. $\varphi_{12}^{-1}(0) < \mu_1$ на луче $\mu_1 = 0$, $\mu_2 < 0$, а $\mu_1 < \varphi_{12}^{-1}(0)$ на луче $\mu_2 = 0$,

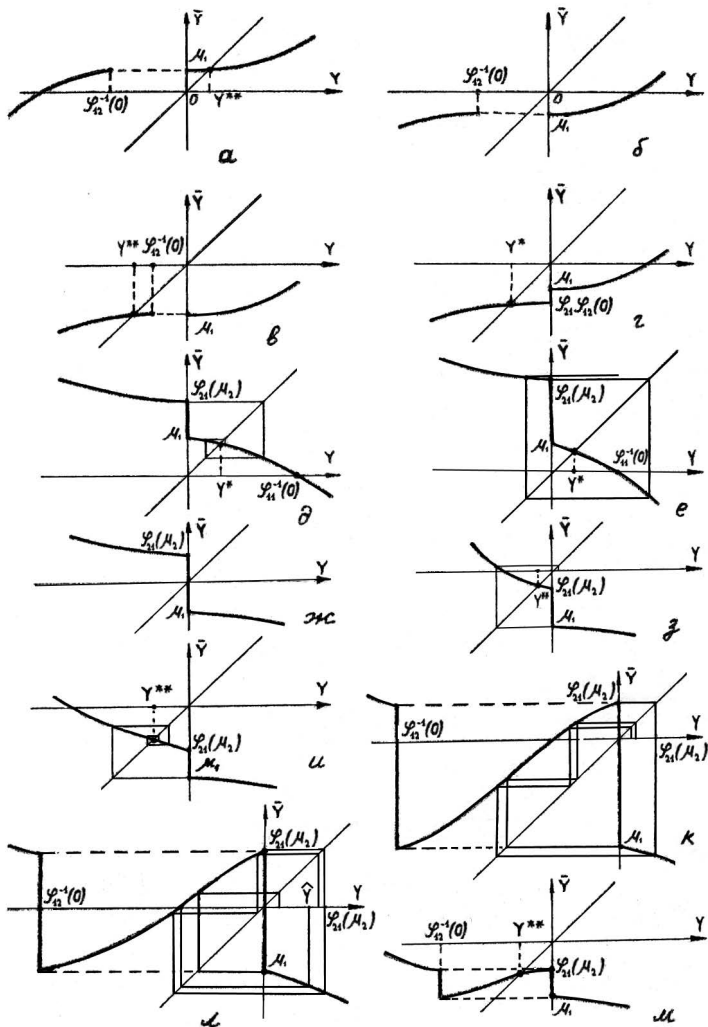


Рис. 4

$\mu_1 < 0$. Отсюда по непрерывности φ_{12} по μ сектор $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ разбивается на две области: Д2, где $\varphi_{12}^{-1}(0) < \mu_1$ (здесь у S_μ существует единственный цикл типа $\{2\}$) и Д3, где $\varphi_{12}^{-1}(0) > \mu_1$ (у S_μ два цикла: типов $\{2\}$ и $\{12\}$). Бифуркационной кривой служит линия $\varphi_{12} \circ \varphi_{21}(0) = 0$. Это условие означает, что 0 - неподвижная точка отображения $\varphi_{12} \circ \varphi_{21}$, значит, S_μ имеет гомоклиническую к седлу траекторию типа $\{12\}$. На основании свойства 5) отображения φ_μ это условие запишется в виде $\mu_2 = -\varphi_{12}(\mu, \mu_1)$, откуда получаем, что $\mu_2 = h(\mu_1)$ где h - функция с константой Липшица меньшей единицы. Аналогичные утверждения относительно остальных бифуркационных кривых доказываются так же. Останавливаться на этом больше не будем.

В силу симметрии задачи, в случае $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ (области Д5 и Д6) рассуждения такие же, как и в случае $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$. Рассмотрим область Д4: $\mu_2 > 0, \mu_1 < 0$.

У φ_{22} нет неподвижных точек (если существует y^* такое, что $\varphi_{22}(y^*) = y^*$, то $(y^*, 0) \xrightarrow{\varphi_{22}} (y^*, \mu_2)$, а так как $\mu_2 > 0$, то это противоречит тому, что φ_{22} - сжимающее отображение), следовательно, все траектории с ℓ_2 попадают на ℓ_1 . Траектория точки $y \in \ell_1$ возвращается на ℓ_1 в точку \bar{y} :

$$\bar{y} = \begin{cases} \varphi_{11}(y) & \text{при } y > 0 \\ \varphi_{21}\varphi_{12}(y) & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

График \bar{y} приведен на рис. 4, г. Единственная неподвижная точка отображения $\varphi_{21} \varphi_{12}$ - это цикл типа $\{12\}$, других периодических точек нет.

2) φ_{11} и φ_{12} - убывающие, φ_{21} и φ_{22} - возрастающие (бифуркационная диаграмма приведена на рис.2). При $\mu_2 < 0$ рассуждения такие же, как и в случае I. Пусть $\mu_2 > 0$. У φ_{22} нет неподвижных точек, и все траектории попадают на ℓ_1 , где определено отображение

$$\bar{y} = \begin{cases} \varphi_{11}(y) & \text{при } y > 0 \\ \varphi_{21}\varphi_{12}(y) & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

\bar{y} - убывающая функция, в нуле терпит разрыв:

$$\lim_{y \rightarrow -0} \bar{y} = \varphi_{21}\varphi_{12}(0) = \varphi_{21}(\mu_2) > \varphi_{21}(0) = \mu_1 = \varphi_{11}(0) = \lim_{y \rightarrow +0} \bar{y}.$$

а) $\mu_1 > 0$. Если $\varphi_{21}(\mu_2) < \varphi_{11}^{-1}(0)$ (область Д8), то график \bar{y} таков, как на рис. 4, д. У φ_{11} есть неподвижная точка y^* - цикл типа {I}. Траектория точки $\varphi_{21}(\mu_2)$ стремится к y^* , а вместе с ней и остальные траектории, так что y^* - единственная периодическая точка φ_{μ} . Если $\varphi_{21}(\mu_2) > \varphi_{11}^{-1}(0)$ (область Д7), то график \bar{y} таков, как на рис. 4, е. Видно, что луч $(-\infty, 0)$ отображением $\varphi_{11}\varphi_{21}\varphi_{12}$ переводится в себя. $\varphi_{11}\varphi_{21}\varphi_{12}$ - сжимающее отображение, так что у него есть единственная неподвижная точка - цикл типа {I2I}.

б) $\mu_1 < 0$. Если $\varphi_{21}(\mu_2) > 0$ (область Д6), то график \bar{y} таков, как на рис. 4, ж. Неподвижная точка отображения φ_{11} исчезла, осталась только неподвижная точка отображения $\varphi_{11}\varphi_{21}\varphi_{12}$ - цикл типа {I2I}. Если $\varphi_{21}(\mu_2) > 0$ и $\varphi_{21}\varphi_{12}(\mu_1) > 0$ (область Д5), то график \bar{y} таков, как на рис. 4, з. В дополнение к циклу {I2I} появилась неподвижная точка отображения $\varphi_{21}\varphi_{12}$ - цикл {I2}. Если $\varphi_{21}\varphi_{12}(\mu_1) < 0$ (область Д4), то график \bar{y} таков, как на рис. 4, и. Траектория точки μ_1 стремится к y^{**}

(а вместе с ней и все остальные траектории). y^{**} - единственная периодическая точка φ_{μ} .

3) φ_{11} и φ_{22} - убывающие, а φ_{12} и φ_{21} - возрастающие (бифуркационная диаграмма приведена на рис.3). Доказательство приведем только при $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$ (для других значений параметров рассуждения аналогичны случаю 2). Так как $\mu_2 > 0$, у φ_{22} нет неподвижных точек, и все траектории попадают на l_1 . Траектория, выходящая из точки $y \in l_1$, возвращается на l_1 в точку \bar{y}

$$\bar{y} = \begin{cases} \varphi_{11}(y) & \text{при } y > 0 \\ \varphi_{21}\varphi_{12}(y) & \text{при } \varphi_{12}^{-1}(0) < y < 0; \\ \varphi_{21}\varphi_{22}\varphi_{12}(y) & \text{при } y < \varphi_{12}^{-1}(0) \end{cases}$$

\bar{y} возрастает на $(\varphi_{12}^{-1}(0), 0)$ и убывает при остальных значениях y :

$$\lim_{y \rightarrow +0} \bar{y} = \mu_1, \quad \lim_{y \rightarrow -0} \bar{y} = \varphi_{21}(\mu_2), \quad \lim_{y \rightarrow \varphi_{12}^{-1}(0)+0} \bar{y} = \mu_1, \quad \lim_{y \rightarrow \varphi_{12}^{-1}(0)-0} \bar{y} = \varphi_{21}(\mu_2);$$

поскольку $\mu_2 > 0$, то $\varphi_{21}(\mu_2) > \varphi_{21}(0) = \mu_1$.

а) $\mu_1 < 0$, $\varphi_{21}(\mu_2) > 0$ (область Дб). График \bar{y} таков, как на рис.4, к или 4, л. Точка μ_1 , сделав несколько итераций (число их обозначим через χ), попадает в область $y > 0$.

Предположим, что $\varphi_{12}^{-1}(0) \geq \varphi_{11}\varphi_{21}(\mu_2)$, тогда так как $(0, \varphi_{21}(\mu_2)) \xrightarrow{\varphi_{11}} \varphi_{11} \rightarrow (\varphi_{11}\varphi_{21}(\mu_2), \mu_1)$, а φ_{11} - сжимающее, то $\varphi_{21}(\mu_2) > \mu_1 - \varphi_{11}\varphi_{21}(\mu_2) \geq \mu_1 - \varphi_{12}^{-1}(0)$. Поэтому $\varphi_{21}(\mu_2) - \mu_1 > 0 - \varphi_{12}^{-1}(0)$. Но, с другой стороны, $(\varphi_{12}^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\varphi_{21}\varphi_{12}} (\mu_1, \varphi_{21}(\mu_2))$, и, так как $\varphi_{21}\varphi_{12}$ - сжимающее отображение, $\varphi_{21}(\mu_2) - \mu_1 < 0 - \varphi_{12}^{-1}(0)$. Полученное противоречие показывает, что $\varphi_{11}\varphi_{21}(\mu_2) > \varphi_{12}^{-1}(0)$, т.е. траектория точки $\varphi_{21}(\mu_2)$ попадает в область $(\varphi_{12}^{-1}(0), 0)$ и, сделав несколько итераций (их число обозначим через ϱ), попадает в область $y > 0$. Поскольку $\mu_1 = \varphi_{21}\varphi_{12}(\varphi_{12}^{-1}(0))$, то если

траектория точки μ_1 попадает в область $y > 0$, сделав z итераций, траектория точки $\varphi_{12}^{-1}(0)$ попадает в область $y > 0$, сделав $z+1$ итераций, а так как $\varphi_{12}^{-1}(0) < \varphi_{11} \varphi_{21}(\mu_2) < \mu_1$, то $z \leq q \leq z+1$.

Если $q = z$ (область Дб, $z, 1: (\varphi_{21} \varphi_{12})^{z-1} \mu_1 < 0, (\varphi_{21} \varphi_{12})^z \varphi_{11} \varphi_{21}(\mu_2) > 0$), то (см. рис. 4, к) $(0, \varphi_{21}(\mu_2)) \xrightarrow{(\varphi_{21} \varphi_{12})^z \varphi_{11}} (0, \varphi_{21}(\mu_2))$, значит, на отрезке $(0, \varphi_{21}(\mu_2))$ есть неподвижная точка отображения $(\varphi_{21} \varphi_{12})^z \varphi_{11}$ - цикл типа $\{(12)^z I\}$, и других периодических точек нет.

Если $q = z+1$ (область Дб, $z, 2: (\varphi_{21} \varphi_{12})^z \mu_1 > 0, (\varphi_{21} \varphi_{12})^{z+1} \varphi_{11} \varphi_{21}(\mu_2) < 0$), то для отрезков $(0, \hat{y})$ и $(\hat{y}, \varphi_{21}(\mu_2))$ имеем $(0, \hat{y}) \xrightarrow{(\varphi_{21} \varphi_{12})^z \varphi_{11}} (0, \hat{y})$ и $(\hat{y}, \varphi_{21}(\mu_2)) \xrightarrow{(\varphi_{21} \varphi_{12})^{z+1} \varphi_{11}} (\hat{y}, \varphi_{21}(\mu_2))$, где $\hat{y} = \varphi_{11}^{-1}[(\varphi_{21} \varphi_{12})^{z+1}]^{-1}(0)$ (см. рис. 4, л), так что на каждом из этих отрезков имеется по неподвижной точке соответствующего отображения - это циклы $\{(12)^z I\}$ и $\{(12)^{z+1} I\}$.

Очевидно, что $q = z = 1$ при $\mu_1 = 0$, а если $\varphi_{21}(\mu_2) \rightarrow 0$, то $z \rightarrow \infty$.

б) $\varphi_{12}(\mu_1) > 0, \varphi_{21}(\mu_2) < 0$ (область Д5). График \bar{y} таков, как на рис. 4, м. Периодическая точка одна - это неподвижная точка отображения $\varphi_{21} \varphi_{12}$ - цикл типа $\{12\}$.

В силу симметрии задачи, при $\varphi_{12}(\mu_1) < 0$ (область Д4) рассуждения такие же, как и в случае $\varphi_{21}(\mu_2) > 0$ (область Д6). Рассмотрев все возможные варианты, убеждаемся в справедливости теоремы в случае $\bar{b} < 0$ (все φ_{ij} - сжимающие отображения).

Случай $\bar{b} > 0$ (все φ_{ij} - растягивающие) сводится к рассмотренному следующим образом: отождествим точки $y = 0 \in \ell_{21}$ с $y = 0 \in \ell_{11}$ и $y = 0 \in \ell_{22}$ с $y = 0 \in \ell_{12}$, поло-

тим $\tilde{e}_j = e_{1j} \cup e_{2j}, \tilde{e}_{ij} = e_{ji} \quad (i, j = 1, 2)$ и перейдем от
 φ_μ к $\tilde{\varphi}_\mu = \varphi_\mu^{-1} : \tilde{e}_1 \cup \tilde{e}_2 \xrightarrow{\varphi_\mu} \tilde{e}_1 \cup \tilde{e}_2$.

В заключение автор благодарит Л.П. Шильникова за постановку задачи и внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. - Матем. сб., 1968, 77 (3), с. 461-472.
2. Афраимович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. - Тр. Моск. матем. об-ва, 1982, 44, с.150-212.
3. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца - В кн.: Дж. Марсден, М. Мак-Кракен, Бифуркация рождения цикла и ее приложения, - М.: Мир, 1980, с.317-335.

НИИ прикладной математики и
кибернетики при ГГУ