ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 342, № 5, с. 596 - 599

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О КАТАСТРОФАХ ГОЛУБОГО НЕБА

© 1995 г. Д. В. Тураев, Л. П. Шильников

Представлено академиком Д.В. Аносовым 18.01.94 г.

Поступило 19.01.94 г.

В настоящей работе решаются две следующие задачи. Во-первых (теорема 1), приводится пример бифуркации коразмерности один типа "катастрофы голубого неба" [1]: в пространстве гладких потоков в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, выделяется бифуркационная поверхность коразмерности один такая, что для любого трансверсального к ней однопараметрического семейства X_μ система X_μ при всех малых $\mu > 0$ (или $\mu < 0$) имеет устойчивую периодическую траекторию, период и длина которой стремятся к бесконечности при $\mu \to 0$. Во-вторых (теорема 2), найдена достижимая граница, отделяющая потоки Морса–Смейла от потоков с гиперболическими аттракторами типа соленоида Смейла–Вильямса [2, 3]. Отметим, что при приближении к границе соленоид не претерпевает бифуркаций, а период и длина любой периодической траектории в нем стремятся к бесконечности.

Рассмотрим $\mathbb{C}^\infty$-гладкое однопараметрическое семейство динамических систем X_μ в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что при $\mu = 0$ поток X_μ имеет периодическую траекторию L_0 типа простой седло–узел. Возьмем малую окрестность U_0 траектории L_0. U_0 представляет собой полноторий, разделяемый $(n-1)$-мерным сильноустойчивым многообразием W^{ss} на две области: узловую U^+, все траектории из которой стремятся к L_0 при $t \to +\infty$, и седловую U^-, в которой выделяется двумерное неустойчивое многообразие W^u с краем L_0. Продолжим W^u вовне U_0 по траекториям системы X_0. Предположим, что при $t \to +\infty$ все траектории из W^u возвращаются в U_0 и входят в узловую область. При этом любая траектория из W^u является двоякоасимптотической к L_0.

Заметим, что близкие к X_0 системы с простым седло–узлом, близким к L_0, образуют поверхность $\mathcal{H}$ коразмерности один в пространстве динамических систем. Потребуем, чтобы семейство X_μ было трансверсально $\mathcal{H}$. При этом при $\mu < 0$ траектория L_0 разваливается на две периодические траектории: седловую L_μ^- и узловую L_μ^+, а при $\mu > 0$ исчезает.

НИИ прикладной математики и кибернетики,
Нижний Новгород

Достаточно очевидно, что при всех малых $\mu < 0$ система X_μ будет системой Морса–Смейла в малой окрестности U множества W^u. Здесь неблуждающее множество состоит из двух периодических траекторий L_μ^- и L_μ^+: все траектории из $U \backslash W^s(L_\mu^-)$ стремятся к L_μ^+. При $\mu = 0$ траектории из U стремятся к L_0.

При $\mu > 0$ ситуация значительно сложнее. Ранее было установлено [4], что если W^u является гладким подмногообразием $\mathbb{R}^n$, то при $\mu > 0$ от W^u отрождается устойчивая двумерная инвариантная поверхность (либо тор, либо бутылка Клейна). Если W^u – негладкое многообразие, то при $\mu > 0$ возможно весьма сложное поведение траекторий [4 - 6], в частности появление грубых гомоклинических кривых Пуанкаре. Заметим, что если X_0 имеет глобальную секущую, то W^u всегда гомеоморфно тору.

В настоящей работе мы обращаем внимание на тот факт, что для потоков без глобальной секущей множество W^u может не быть топологическим многообразием (окрестности в W^u точек на L_0 могут не быть гомеоморфны диску). Именно в этой ситуации мы строим примеры катастроф голубого неба.

Введем координаты (x, y, φ) в U_0, $\varphi \in S^1$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, так чтобы векторное поле записывалось в виде

$$\begin{aligned} \dot{y} &= G(\varphi, x, y, \mu)y, \\ \dot{x} &= F(\varphi, x, \mu), \\ \dot{\varphi} &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где G и F – 2π-периодические по φ гладкие функции,

$$F(\varphi, 0, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi, 0, 0) \equiv 0, \tag{2}$$

спектр матрицы монодромии H для уравнения

$$\dot{y} = G(\varphi, 0, 0, 0)y$$

лежит строго внутри единичного круга. В данных координатах L_0 задаётся уравнением $\{x = 0, y = 0\}$.

Приведение к виду (1) достигается распрямлением центрального многообразия $W^c(L_0)$ (в данных координатах это цилиндр $y = 0$) и инвариантного слоения, трансверсального к W^c (здесь слоение $\{x = \mathrm{const}\}$). Последние два уравнения в (1) задают ограничение системы на центральное многообразие.

Лемма 1. *При подходящем выборе координат*

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \mu O((|\mu| + x^2)^2). \tag{3}$$

Для доказательства заметим, что в силу известной теоремы о вложении в поток [5] можно считать, что $\frac{\partial F}{\partial \varphi} \equiv 0$ при $\mu = 0$. Далее стандартными нормализующими преобразованиями можно добиться, чтобы $\frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ обращалась в нуль при $x = 0$, $\mu = 0$ вместе с достаточным количеством своих производных по x и μ, и, в частности, добиться выполнения соотношения (3).

Так как L_0 – простой седло–узел, то при $\mu = 0$

$$F = l_2x^2 + o(x^2),$$

где $l_2 \neq 0$. Не уменьшая общности, можно положить $l_2 = 1$. Трансверсальность семейства X_μ к $\mathcal{H}$ позволяет записать

$$F = \mu + x^2 + O(\mu x, x^3, \mu^2). \tag{4}$$

Выберем малое $\varepsilon > 0$ и построим две секущие Π^+: $\{x = -\varepsilon\}$ и Π^-: $\{x = \varepsilon\}$. Будем считать, что окрестность U_0 траектории L_0 ограничена по x поверхностями Π^- и Π^+. При этом области U^- отвечают значения $x \in (0, \varepsilon)$, а U^+ – значения $x \in (-\varepsilon, 0)$. Так как при $\mu = 0$ все траектории из W^u возвращаются за конечное время в U^+, то при $\mu = 0$ (а значит, и при всех малых μ) на малой окрестности следа l^-: $\{y = 0\}$ множества W^u на Π^- определено отображение $T_1 : (\varphi, y) \mapsto (\varphi_0, y_0) \in \Pi^+$ по траекториям потока X_μ:

$$y_0 = p(\varphi, y, \mu), \quad \varphi_0 = q(\varphi, y, \mu) \bmod 2\pi, \tag{5}$$

где p и $q \bmod 2\pi$ – периодические по φ гладкие функции.

Кривая $l^+ = T_1 l^-$: $\{y_0 = p(\varphi, 0, 0),\ \varphi_0 = q(\varphi, 0, 0) \bmod 2\pi\}$ есть пересечение W^u с Π^+. Функция q имеет вид

$$q(\varphi, y, \mu) = m\varphi + q_0(\varphi, y, \mu), \tag{6}$$

где q_0 – периодическая по φ функция, m – целое число, определяющее гомотопический класс кривой l^+ (с учетом ориентации относительно l^-) в полнотории Π^+.

Если размерность n фазового пространства больше трех, то Π^+ по крайней мере трехмерен и здесь возможны любые значения m (см. рис. 1 для $m = 2$). При $n = 3$ Π^+ является двумерным кольцом, поэтому здесь может быть только $m = 0$ (рис. 2) и $m = 1$.

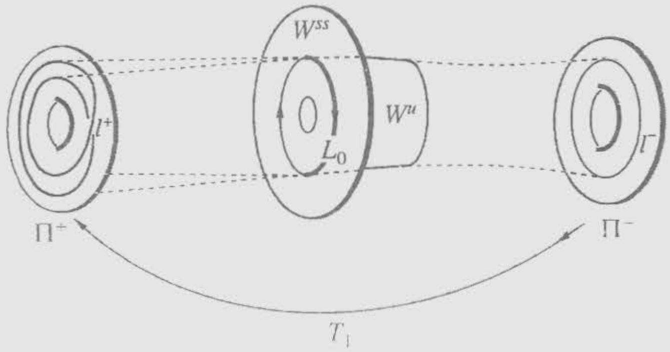

Рис. 1.

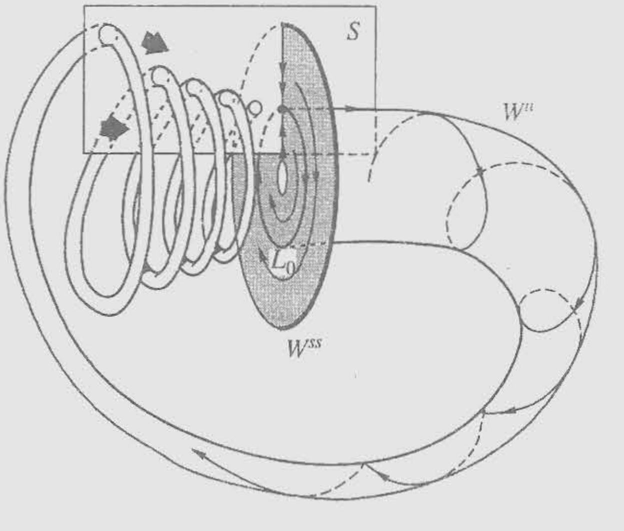

Рис. 2.

Отметим, что структура множества W^u полностью определяется характером примыкания W^u к L_0 со стороны узловой области. Можно убедиться, что $W^u \cap U^+$ в пересечении с любой секущей S вида $\{\varphi = \mathrm{const}\}$ состоит при $m \neq 0$ из $|m|$ кусков, подклеенных друг к другу в точке $(x = 0, y = 0) = L_0 \cap \{\varphi = \mathrm{const}\}$. При $m = 0$ множество $W^u \cap \{\varphi = \mathrm{const}, x < 0\}$ состоит из счетного числа компонент (гомеоморфных окружности), накапливающихся к $(x = 0, y = 0)$ (рис. 3). Ясно, что W^u будет топологическим многообразием только при $m = \pm 1$ (тор или бутылка Клейна).

Обозначим $f(\varphi) = m\varphi + q_0(\varphi, 0, 0)$. Можно показать, что функция f, определяемая с точностью до произвольного постоянного добавка и сдвига начала координат: $f(\varphi) \to C_0 + f(\varphi + C_1)$, однозначно определяется по системе X_0, т.е. не зависит от гладких замен координат, оставляющих систему в U_0 в виде (1) - (4), и от выбора величины ε.

Теорема 1. *Пусть $m = 0$ и $|f'(\varphi)| < 1$ при всех φ. Тогда при всех малых $\mu > 0$ система X_μ имеет устойчивую периодическую траекторию L_μ (негомотопную L_0 в U), к которой стремятся все траектории из U.*

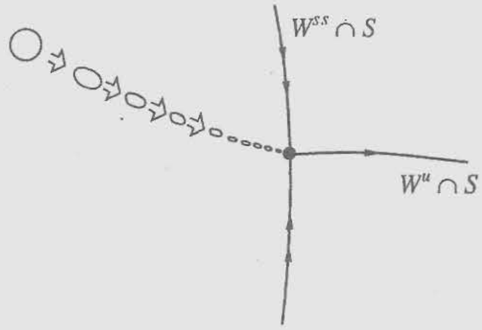

Рис. 3.

Теорема 2. *Пусть* $|m| \geq 2$ *и* $|f'(\varphi)| > 1$ *при всех* φ. *Тогда при каждом малом* $\mu > 0$ *все траектории из* U *стремятся к гиперболическому аттрактору* A_μ, *топологически эквивалентному надстройке над пределом обратного спектра растягивающего отображения окружности*

$$\bar{\varphi} = m\varphi \bmod 2\pi. \tag{7}$$

Доказательство. В силу (1), (4) $\dot{x} > 0$ при малых $\mu > 0$ и малых x. Поэтому при всех малых $\mu > 0$ определено отображение T_0: $(y_0, \varphi_0) \mapsto (y, \varphi)$ по траекториям системы X_μ с Π^+ в Π^-. В силу (1) это отображение представляется в виде

$$y = \Psi(\varphi_0, y_0, \mu), \quad \varphi = \varphi_0 + t(\varphi_0, \mu), \tag{8}$$

где t – время перехода с Π^+ на Π^-: t – периодическая по φ_0 функция, гладко зависящая от φ_0 и $\mu > 0$ и не зависящая от y_0. Ясно, что $t \to +\infty$ при $\mu \to +0$. Обозначим $\nu(\mu) = t(0, \mu)$.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$t(\varphi_0, \mu) = \nu(\mu) + \tau(\varphi_0, \mu), \tag{9}$$

где τ *и* $\partial\tau/\partial\varphi_0$ *стремятся к нулю при* $\mu \to 0$.

Действительно, рассмотрим траекторию $\{x(t; \varphi_0, \mu), \varphi(t; \varphi_0, \mu), y(t; \varphi_0, y_0, \mu)\}$ системы (1), выходящую при $t = 0$ из точки (φ_0, y_0) на Π^+. Так как $\partial x/\partial t$ $(\equiv F(\varphi, x, \mu))$ не обращается в нуль при $\mu > 0$, то мы можем выразить t через x, φ_0 и μ. При этом в силу (1)

$$\varphi = \varphi_0 + t(x, \varphi_0, \mu), \tag{10}$$

$$t(x, \varphi_0, \mu) = \int_{-\varepsilon}^{x} \frac{ds}{F(s, \varphi_0 + t(s, \varphi_0, \mu), \mu)}. \tag{11}$$

Обозначим $u = \partial t/\partial\varphi_0$. Дифференцируя (11) по φ_0, находим

$$u(x, \varphi_0, \mu) =$$

$$= -\int_{-\varepsilon}^{x} \left.\frac{\partial F/\partial\varphi}{F^2}\right|_{(s,\, \varphi_0 + t(s,\, \varphi_0,\, \mu),\, \mu)} [1 + u(s, \varphi_0, \mu)]ds. \tag{12}$$

В силу (3), (4)

$$\left|\frac{\partial F/\partial\varphi}{F^2}\right| \to 0 \text{ при } \mu \to +0,$$

поэтому u может быть найдено как решение интегрального уравнения (12) методом последовательных приближений. Отсюда, поскольку правая часть (12) определена и непрерывна при $\mu \geq 0$, решение u остается непрерывным при $\mu \geq 0$. В частности, $u \to 0$ при $\mu \to 0$. Теперь, так как $t(\varepsilon, \varphi_0, \mu) = t(\varepsilon, 0, \mu) + \tau(\varphi_0, \mu)$, где

$$\tau(\varphi_0, \mu) = \int_0^{\varphi_0} u(\varepsilon, \phi, \mu)d\phi,$$

получаем утверждение леммы.

Получим теперь оценку для функции Ψ в (8). Для этого заметим, что при подходящем выборе нормы для y из первого уравнения в (1) тривиальным образом следует, что

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|e^{-\lambda t}, \quad \|\dot{y}(t)\| \leq \|y_0\|e^{-\lambda t}, \tag{13}$$

$$\|\partial y(t)/\partial y_0\| \leq e^{-\lambda t}, \quad \|\partial y(t)/\partial\varphi_0\| \leq t\|y_0\|e^{-\lambda t}, \tag{14}$$

где λ таково, что собственные числа матрицы монодромии H строго меньше по абсолютной величине, чем $e^{-2\pi\lambda}$. Так как функция $\Psi(\varphi_0, y_0, \mu)$ находится как $y(t(\varepsilon, \varphi_0, \mu); \varphi_0, y_0, \mu)$, то из (13), (14) и (9), (10) получаем

$$\|\Psi\| \leq Ke^{-\lambda\nu}, \quad \|\partial\Psi/\partial y_0\| \leq Ke^{-\lambda\nu},$$

$$\|\partial\Psi/\partial\varphi_0\| \leq K\nu e^{-\lambda\nu}$$

для некоторой константы K.

Теперь, так как $\nu \to +\infty$ при $\mu \to 0$ $\left(\text{из (4) и (11)}\right.$ $\left.\nu(\mu) \geq \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{dx}{\mu + x^2}\right)$, получаем, что Ψ стремится к нулю при $\mu \to 0$ вместе с производными по φ_0 и y_0. Отсюда на основании формул (5), (6), (8), (9) находим, что отображение T_0T_1: $(\varphi, y) \mapsto (\bar{\varphi}, \bar{y})$ из Π^- в Π^- по траекториям потока X_μ может быть при достаточно малом ε и всех малых $\mu > 0$ представлено в виде

$$\begin{gathered}\bar{y} = g(\varphi, y, \mu),\\ \bar{\varphi} = \nu(\mu) + m\varphi + g_0(\varphi, 0, 0) + h(\varphi, y, \mu)(\bmod 2\pi),\end{gathered} \tag{15}$$

где g и h – периодические по φ функции, гладкие по φ и y при $\mu \geq 0$, причем

$$\begin{gathered}g(\varphi, y, 0) = 0, \quad g'_\varphi(\varphi, y, 0) = 0,\\ g'_y(\varphi, y, 0) = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$h(\varphi, 0, 0) = 0, \quad h'_\varphi(\varphi, 0, 0) = 0. \tag{17}$$

Эти формулы означают, что при $\mu \to +0$ отображение T_0T_1 становится сколь угодно близким (в $\mathbb{C}^1$-топологии) к одномерному отображению

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{\varphi} = \nu(\mu) + m\varphi + q_0(\varphi, 0, 0) = \\ = \nu(\mu) + f(\varphi)(\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{18}$$

При $m = 0$ и $|f'(\varphi)| < 1$ отображение (18) при любом ν имеет устойчивую неподвижную точку, к которой стремятся все траектории. То же самое, очевидно, справедливо и для всех близких отображений, в частности для отображения T_0T_1 при малых $\mu > 0$. Так как T_0T_1 – отображение по траекториям, то неподвижной точке отвечает периодическая траектория системы, откуда следует утверждение теоремы 1. Надо отметить, что период траектории L_μ имеет порядок величины $\nu(\mu)$ и стремится к бесконечности при $\mu \to 0$. Так как векторное поле системы X_μ нигде в U в нуль не обращается, то отсюда следует, что и длина траектории L_μ стремится к бесконечности.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что отображение (15) при условии $|f'(\varphi)| > 1$ является в силу (16), (17) растягивающим по φ и сильно сжимающим по y при малых μ и y. Отсюда стандартным образом устанавливается, что отображение (15) имеет сжимающее инвариантное слоение из гладких слоев вида $\{\varphi = \Phi(y: \varphi', \mu)\}$, где φ' – координата точки пересечения слоя с $\{y = 0\}$, $\partial\Phi/\partial y$ непрерывно зависит от (φ', μ) при всех $\mu \geq 0$. Также можно установить, что после факторизации по слоям отображение (15) оказывается растягивающим отображением окружности степени m и, следовательно, при любом μ эквивалентно отображению (7), откуда (аналогично [3, 7]) вытекает утверждение теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–011–1787) и Международного научного фонда (грант R 999000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Palis J., Pugh C.* // Lect. Notes. Math. 1975. V. 468. P. 345 - 353.
2. *Smale S.* // Bull. Am. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747 - 817.
3. *Williams R.F.* // Topology. 1967. V. 6. P. 473 - 487.
4. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* // ДАН. 1974. Т. 219. № 6. С. 1281 - 1285.
5. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* // Publ. Math. IHES. 1983. V. 57. P. 5 - 72.
6. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* В сб.: Математические механизмы турбулентности. Киев, 1986. С. 113 - 121.
7. *Williams R.F.* // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 169 - 203.