Доклады Академии наук СССР

1991. Том 320, № 2

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

© С.В. ГОНЧЕНКО, Д.В. ТУРАЕВ, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

О МОДЕЛЯХ С НЕГРУБОЙ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ПУАНКАРЕ

(Представлено академиком А.А. Самарским 5 VI 1991)

1. Хорошо известно, что в трехмерных гладких системах с отрицательной дивергенцией встречаются странные аттракторы двух типов: аттракторы Лоренца и квазиаттракторы. Последние наряду с грубыми гомоклиническими кривыми Пуанкаре могут иметь также и негрубые, в силу чего либо у самой системы, либо у близкой наряду со счетным множеством седловых может быть счетное множество устойчивых периодических движений [1, 2]. Естественно, что динамика таких систем оказывается весьма чувствительной к малым изменениям параметров, что хорошо заметно при численных экспериментах. Квазиаттракторы обнаруживаются в самых различных системах, например в модели Лоренца*, в отображении Эно, в системах со спиральным хаосом [4], при разрушении двумерных торов [5, 6] и т.д. Поэтому особую важность приобретает вопрос: возможно ли в принципе полное исследование таких систем в рамках конечнопараметрических семейств дифференциальных уравнений – традиционной модели динамических явлений?

Постановка задачи, связанная с исследованием моделей, восходит к Андронову и состоит: 1) в разбиении пространства параметров на области грубости и выделении бифуркационного множества; 2) в разбиении бифуркационного множества на связанные компоненты, отвечающие одинаковым фазовым портретам (в смысле топологической эквивалентности). В соответствии с этим в хорошей модели должно быть достаточно параметров для анализа всех встретившихся в ней бифуркаций состояний равновесия, периодических движений, гомоклинических и гетероклинических траекторий и т.п.

О п р е д е л е н и е. Семейство X_μ дифференциальных уравнений, гладко зависящих от набора параметров μ из некоторой области $\mathscr{D} \subseteq \mathbf{R}^m$, назовем х о р о ш и м, если для некоторой окрестности семейства X_μ как множества в пространстве динамических систем существует непрерывное слоение с базой $\mathscr{D}$ и банаховым слоем коразмерности m такое, что: 1) все слои удовлетворяют условию Липшица с некоторой общей константой; 2) X_μ пересекает каждый слой в одной точке и трансверсально ко всем близким к слою гладким многообразиям с той же константой Липшица; 3) любые две системы, принадлежащие одному слою, топологически эквивалентны, причем если системы достаточно близки, то гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, близок к тождественному.

Мы полагаем, что задачу полного описания разумно ставить только для хороших моделей в смысле данного определения. Если модель этому требованию не удовлетворяет, то можно увеличивать число параметров, либо, если это не помогает, ослаблять отношение эквивалентности.

Очевидно, что в хорошей модели все бифуркации имеют конечную коразмерность, и модель трансверсальна ко всем бифуркационным подмногообразиям. В случае дифференциальных уравнений на плоскости, по-видимому, этого достаточно,

*Здесь негрубые гомоклинические кривые Пуанкаре появляются вблизи границы существования аттрактора Лоренца (при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r > 31$ [3]).

чтобы модель была хорошей (по крайней мере это так в случае, когда все бифуркации в модели имеют небольшую коразмерность). В многомерном случае принципиальные отличия возникают уже в классе систем с тривиальной динамикой, т.е. без гомоклинических кривых Пуанкаре. Здесь, чтобы семейство было хорошим, необходимо также, чтобы в нем не было систем с бесконечным числом модулей.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что X имеет м о д у л ь, если в пространстве динамических систем X лежит в банаховом многообразии $\mathcal{M}$, на котором определен непрерывный, локально не постоянный функционал h такой, что для эквивалентности любых X_1 и X_2 из $\mathcal{M}$ необходимо, чтобы $h(X_1) = h(X_2)$. Будем говорить, что X и м е е т m м о д у л е й, если через X проходит банахово многообразие $\mathcal{M}$, на котором определено m независимых модулей, и что X имеет с ч е т н о е ч и с л о м о д у л е й, если X имеет любое конечное число модулей.

Модули в системах с простой динамикой открыл Пэлис[7] (для диффеоморфизмов плоскости с негрубой гетероклинической траекторией). В [8] указаны условия, при которых в данном классе может быть счетное число модулей. Заметим, однако, что если ограничиться Ω-эквивалентностью, то системы данного типа оказываются грубыми, и, естественно, любое конечнопараметрическое семейство будет хорошим.

2. В рассмотренных примерах значения параметров, при которых модель не является хорошей, образуют нигде не плотное множество в $\mathcal{D}$. Для систем со странными аттракторами ситуация усложняется, поскольку негрубые системы здесь могут заполнять области. Наиболее известные примеры с плотной Ω-негрубостью – это модели с аттракторами Лоренца и модели с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. В случае аттрактора Лоренца пара нидинг-инвариантов [9, 10] служит полным инвариантом Ω-эквивалентности, поэтому здесь можно проводить исследование динамики в двупараметрических моделях. Во втором случае ситуация весьма нетривиальна. Это связано, в частности, со следующим фактом, открытым Ньюхаусом [11]: любая модель, трансверсальная бифуркационной пленке коразмерности один, отвечающей гомоклинической орбите с квадратичным касанием, пересекает области, в которых плотны системы в негрубыми гомоклиническими кривыми Пуанкаре.

Рассмотрим C^r-гладкий, $3 \leqslant r \leqslant \infty$, поток X_0, заданный на трехмерном гладком многообразии M^3. Предположим, что X_0 имеет седловое периодическое движение L_0 с мультипликаторами λ, γ (где $|\gamma| > 1 > |\lambda|$ и седловая величина $\sigma = |\lambda\gamma| < 1$) и что устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(L_0)$ и $W^u(L_0)$ имеют квадратичное касание по гомоклинической кривой Пуанкаре Γ_0. Обозначим: N – множество траекторий, целиком лежащих в малой окрестности U контура $L_0 \cup \Gamma_0$. В [1] выделено три типа негрубых гомоклинических кривых Пуанкаре. В случае кривой первого типа множество N имеет тривиальную структуру: $N = \{L_0, \Gamma_0\}$ [12]. В случае кривой второго типа множество N эквивалентно [12] надстройке над фактор-системой, получаемой из схемы Бернулли из трех символов $\{0, 1, 2\}$ отождествлением двух гомоклинических траекторий $(\ldots, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ и $(\ldots, 0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

В случае кривой третьего типа множество N также содержит нетривиальные гиперболические подмножества [12], однако всё N ими, вообще говоря, не исчерпывается. Необходимость изучения кривых третьего типа при анализе систем с квазигиперболическим поведением поясняет следующая

Т е о р е м а 1. *В любой окрестности в C^r-топологии, $r \geqslant 3$, системы с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре есть системы с кривыми третьего типа.*

3. Пусть Γ_0 – кривая третьего типа. Множество потоков, C^r-близких к X_0 и имеющих близкую к Γ_0 гомоклиническую кривую Γ третьего типа, образует в пространстве C^r-потоков на M^3 гладкое подмногообразие $\mathcal{K}_r$ коразмерности один.

Т е о р е м а 2. *В $\mathcal{K}_r$ плотно множество B такое, что любой поток из B имеет счетное множество седловых периодических движений, каждое из которых имеет негрубую гомоклиническую кривую третьего типа.*

Рассмотрим поток $X^* \in B$. Пусть $\{L_k^*\}_{k=0}^{k=\alpha}$ – последовательность седловых периодических движений системы, имеющих негрубые гомоклинические кривые Γ_k^* третьего типа. Очевидно, X^* лежит в пересечении счетного множества гладких банаховых многообразий $\mathcal{M}_m$ таких, что любой поток из $\mathcal{M}_m$ имеет m близких к $L_1^*, \ldots, L_m^*$ периодических траекторий $L_1, \ldots, L_m$ с негрубыми гомоклиническими кривыми $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ третьего типа, причем L_k и Γ_k гладко зависят от потока. Пусть λ_k, γ_k $(|\gamma_k| > 1 > |\lambda_k|)$ – мультипликаторы траектории L_k. Из [13, 14] вытекает, что величины

$$\theta_k = -\frac{\ln|\lambda_k|}{\ln|\gamma_k|}$$

являются модулями Ω-эквивалентности на $\mathcal{M}_m$ (заметим, что фазовое пространство U имеет нетривиальную фундаментальную группу, и речь здесь и ниже идет об Ω-эквивалентности при помощи гомеоморфизма, гомотопного тождественному). В результате приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 3. *В $\mathcal{K}_r$ плотны потоки, имеющие счетное множество гладких модулей Ω-эквивалентности.*

О п р е д е л е н и е. Пусть некоторый C^k-гладкий, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, поток на M^3 имеет седловое периодическое движение L. Предположим, что $W^s(L)$ и $W^u(L)$ имеют касание по гомоклинической траектории Γ. Построим секущую S к Γ. Так как Γ – негрубая гомоклиническая кривая, то на S можно ввести координаты (x, y) так, чтобы локально уравнение $W^s(L)$ было $y = 0$, а уравнение $W^u(L)$ было $y = G(x)$, где $G(0) = 0$ и для некоторого $n \geqslant 1$

$$\frac{\partial^i G(0)}{\partial y^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Будем говорить, что имеет место г о м о к л и н и ч е с к о е к а с а н и е п о р я д к а $n < k$, если $\partial^{n+1}G(0)/\partial y^{n+1} \neq 0$, и к а с а н и е н е о п р е д е л е н н о г о п о р я д к а, если $n = k$.

Т е о р е м а 4. *В $\mathcal{K}_r$ плотны потоки с гомоклиническими касаниями любого порядка (определенного и неопределенного).*

О п р е д е л е н и е. Пусть некоторый C^k-гладкий поток имеет периодическое движение с мультипликатором ν, равным по модулю единице. Будем говорить, что периодическое движение имеет в ы р о ж д е н и е п о р я д к а n (при $\nu = 1$ $1 \leqslant n \leqslant k-1$, а при $\nu = -1$ – $1 \leqslant n \leqslant (k-1)/2$), если первые $n-1$ ляпуновских величин равны нулю, а n-я отлична от нуля. Если при $\nu = 1$ первые $k-1$ а при $\nu = -1$ – первые $[(k-1)/2]$ ляпуновских величин равны нулю, то будем говорить, что периодическое движение имеет в ы р о ж д е н и е н е о п р е д е л е н н о г о п о р я д к а.

Т е о р е м а 5. *В $\mathcal{K}_r$ плотны потоки, имеющие периодические движения любого порядка вырождения (определенного и неопределенного), как с $\nu = 1$, так и с $\nu = -1$.*

4. Как уже отмечалось, любое семейство, трансверсальное $\mathcal{K}_r$, пересекает области Ньюхауса, в которых плотны системы с негрубыми гомоклиническими кривыми Пуанкаре. Из [12], а также [15] следует, что в этих областях плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений. Этот результат можно вывести также из того, что в областях Ньюхауса плотны системы с гомоклиническими кривыми третьего типа (теорема 1), а на пленках таких систем плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений [1, 2]. Из теорем 2 – 5 получаем

Следствие. *В областях Ньюхауса плотны потоки, имеющие счетное число негрубых гомоклинических кривых Пуанкаре, счетное число модулей Ω-эквивалентности, гомоклинические кривые любого порядка касания и периодические движения любого порядка вырождения как с $\nu = 1$, так и с $\nu = -1$**.

Получаем, что модели с негрубыми гомоклиническими кривыми Пуанкаре не могут быть хорошими с точки зрения Ω-эквивалентности. Можно попытаться ослабить отношение эквивалентности, например отказаться от рассмотрения локального поведения траекторий. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим для каждой траектории из N ее кодировку (бесконечную последовательность из символов 0 и 1: каждому витку траектории вблизи L_0 отвечает 0, а витку вблизи Γ отвечает 1). Будем говорить, что какие-либо две близкие к X_0 системы C-эквивалентны, если их множества кодировок совпадают.

Если нас интересуют только установившиеся движения, то можно ограничиться исследованием множества кодировок для траекторий на аттракторе. Для систем с негрубой гомоклинической кривой неясно, какова структура аттрактора, но все устойчивые периодические траектории ему обязательно принадлежат. В связи с этим введем следующее определение: будем говорить, что два потока C^+-эквивалентны, если у них совпадают множества кодировок устойчивых периодических траекторий. Приводимая ниже теорема показывает, что и для таких отношений эквивалентности в областях Ньюхауса нет хороших моделей.

Теорема 6. *В областях Ньюхауса плотны системы со счетным множеством модулей C-эквивалентности и системы со счетным множеством модулей C^+-эквивалентности***.

Таким образом, для систем с квазиаттракторами уже задача полного исследования структуры множества устойчивых периодических траекторий не является реалистичной. Вопрос о том, как правильно ставить задачу исследования систем такого типа, оказывается крайне сложным. По-видимому, здесь приходится отказываться от идеологии "полного описания" и ограничиваться лишь исследованием каких-то частных, но наиболее характерных свойств системы. При этом ответ на вопрос, какие именно свойства заслуживают рассмотрения, должен существенно зависеть от специфики конкретной задачи.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского

Поступило 19 VI 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* – ДАН, 1986, т. 286, № 5, с. 1049–1053. 2. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* – Укр. мат. журн., 1987, т. 39, № 1, с. 21–28. 3. *Быков В.В., Шильников А.Л.* В сб.: Методы качественной теории и теории бифуркаций. Горький, 1989, с. 151–159. 4. *Овсянников И.М., Шильников Л.П.* – Мат. сб., 1986, т. 130, № 4, с. 552–570. 5. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1989, с. 151–159. 6. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* В сб.: Математические механизмы турбулентности. Киев, 1986, с. 113–121. 7. *Palis J.* – Asterisque, 1978, vol. 51, p. 335–346. 8. *de Melo W., van Strien S.J.* – Ergod. Th. and Dynam. Syst., 1987, vol. 7, p. 415–462. 9. *Guckenheimer J., Williams R.F.* – Publ. Math. IHES, 1979, vol. 50, p. 59–71. 10. *Шлячков В.С.* – Функцион. анализ и его прилож., 1985, т. 19, № 3, с. 84–85. 11. *Newhouse S.E.* – Publ. Math. IHES, 1979, vol. 50, p. 101–151. 12. *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* – Мат. сб., 1972, т. 88, № 4, с. 475–492; 1973, т. 90, № 1, с. 139–157. 13. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* – Укр. мат. журн., 1990, т. 42, № 2, с. 153–159. 14. *Гонченко С.В.* В сб.: Методы качественной теории и теории бифуркаций. Горький, 1989, с. 34–39. 15. *Robinson C.* – Communs. Math. Phys., 1983, vol. 90, № 3, p. 433–459.

---

*На самом деле можно показать даже больше, например, что в областях Ньюхауса плотны системы, имеющие счетное множество сколь угодно вырожденных периодических движений и сколь угодно вырожденных гомоклинических касаний.

**Модулями здесь, так же как и в теореме 2, служат величины θ_k.