



УДК: 517.938

MSC 2010: 34C23, 34C14, 37G05, 37G40

## О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах

Л. М. Лерман, Д. В. Тураев

Представлен обзор результатов по локальным бифуркациям обратимых систем (потоков и диффеоморфизмов), связанных с появлением пары аттрактор–репеллер при бифуркации от симметричных состояний равновесия (для потоков) и неподвижных точек (для диффеоморфизмов). Рассматриваются бифуркации коразмерности 1 в системах малой размерности (2, 3 и 4).

Ключевые слова: обратимая (реверсивная) система, обратимый диффеоморфизм, бифуркация, симметричный, состояние равновесия, неподвижная точка, потеря симметрии

### 1. Введение

Обратимые системы служат математическими моделями различных процессов в физике, в частности — в механике [19, 31]. Обычно обратимость — следствие некоторых специальных свойств рассматриваемого процесса. Например, если в дифференциальное уравнение входят только четные производные, как часто бывает в уравнениях Эйлера–Лагранжа и их обобщениях, то соответствующая система дифференциальных уравнений первого порядка будет обратимой относительно некоторой инволюции фазового пространства. Достаточно

---

Получено 20 мая 2012 года

---

Л. М. Лерман благодарит за финансовую поддержку при написании данной работы Российский фонд фундаментальных исследований (гранты 10-01-00429а, 11-01-00001а), а также грант Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, договор 11.G34.31.0039.

Д. В. Тураев благодарен за частичную поддержку гранту RPG-279 фонда Леверхульма.

---

Лерман Лев Михайлович

[lermanl@mm.unn.ru](mailto:lermanl@mm.unn.ru)

Механико-математический факультет и НИИ прикладной математики и кибернетики

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

Тураев Дмитрий Владимирович

[d.turaev@imperial.ac.uk](mailto:d.turaev@imperial.ac.uk)

Department of Mathematics, Imperial College, London SW7 2AZ

общее определение обратимой системы на гладком многообразии  $M$  таково (см. [7, 25]). Предполагается, что на  $M$  действует инволюция, то есть диффеоморфизм  $R: M \rightarrow M$ , такой, что  $R^2 = id_M$ . Векторное поле  $v$  на  $M$  называется *обратимым*, или *реверсивным*, относительно инволюции  $R$ , если выполнено тождество  $DR \circ v(x) = -v(Rx)$ ,  $x \in M$ . Это тождество влечет основное свойство обратимой системы: если  $x(t)$  — решение системы, то  $x_1(t) = Rx(-t)$  также является ее решением. При изучении обратимой системы важную роль играет множество неподвижных точек инволюции  $Fix(R)$ , которое ниже предполагается гладким подмногообразием в  $M$ . Всюду далее в этой работе мы предполагаем все векторные поля и диффеоморфизмы достаточно гладкими, не оговаривая это специально.

Траектория векторного поля, инвариантная относительно действия инволюции, называется *симметричной*. Такая траектория обязана пересекать  $Fix(R)$ . Легко видеть, что траектория может пересекать  $Fix(R)$  не более чем в двух точках, причем пересечение в двух точках влечет периодичность траектории, при этом она пересекает  $Fix(R)$  ровно через каждые полпериода [7, 32]. Состояние равновесия  $p$  является симметричным, если  $p \in Fix(R)$ . Симметричные траектории, отличные от периодических, пересекают  $Fix(R)$  в единственной точке: например, гомоклинические траектории к симметричным состояниям равновесия. Асимметричные траектории системы встречаются парами:  $\gamma, R(\gamma)$ . Известно, что поведение обратимой системы вблизи симметричных траекторий напоминает поведение траекторий гамильтоновой системы, а поведение асимметричных траекторий может быть произвольным, как в любой диссипативной системе.

Существует аналог обратимых систем для случая дискретного времени — это обратимые диффеоморфизмы. Снова предполагается, что на гладком многообразии  $M$  гладко действует инволюция  $R$ . Диффеоморфизм  $T: M \rightarrow M$  называется обратимым, если выполнено тождество  $T^{-1} = R \circ T \circ R$ . Отметим, что обратимый диффеоморфизм является суперпозицией двух инволюций:  $T = (R \circ T^{-1}) \circ R$ . Такое представление позволяет строить обратимые диффеоморфизмы с различными свойствами.

Аналогично случаю потока, вводится понятие симметричных и асимметричных траекторий. Однако характеристические свойства симметричных траекторий здесь несколько иные, чем в случае обратимых потоков. Так, траектория обратимого диффеоморфизма симметрична тогда и только тогда, когда она пересекает  $Fix(R) \cup Fix(T \circ R)$  не более чем в двух точках, при этом она пересекает это множество в точности в двух точках тогда и только тогда, когда эта траектория симметрична и периодична (с периодом  $> 1$ ). Эта траектория имеет нечетный период, если и только если она пересекает оба множества. Любая симметричная периодическая траектория периода  $2p$  содержит точку множества  $Fix(R) \cap T^p(Fix(R))$  или  $Fix(T \circ R) \cap T^p(Fix(T \circ R))$ , а симметричная траектория периода  $2p + 1$  содержит точку из  $Fix(R) \cap T^p(Fix(T \circ R))$  (подробнее см. в [19]).

В прикладных задачах, описываемых обратимыми системами, часто наблюдается такое явление: в некоторой области изменения параметров система демонстрирует устойчивый симметричный режим, но при переходе через критическое значение параметра у нее возникает пара из асимметричных асимптотически устойчивого и асимптотически неустойчивого режимов, симметричных друг другу. Нас будут интересовать именно такие бифуркации, и мы будем называть их *бифуркациями потери симметрии*. Цель данной работы в основном методическая: представить основные локальные бифуркации обратимых систем, связанные с рождением таких пар. Поскольку результаты по бифуркациям обратимых систем рассеяны по различным работам [16, 20, 30], мы решили написать небольшой обзор в надежде, что это будет полезно как специалистам, так (в основном) и тем, кто хотел бы ознакомиться с имеющимися здесь результатами и дополнить их своими исследованиями.

ми. Мы ограничиваемся самыми простыми бифуркациями — коразмерности 1, в системах малой размерности (2, 3 и 4).

## 2. Обратимые двумерные потоки

Начнем с бифуркаций симметричных состояний равновесия в двумерных системах. Ввиду локальности задачи, всегда можно предполагать, что координаты  $(x, y)$  в окрестности состояния равновесия выбраны так, что действие инволюции в этих координатах линейно (это всегда можно сделать по теореме Бохнера–Монтгомери [2]). Основной случай здесь — это инволюция  $R(x, y) = (x, -y)$ . Действительно, есть только два случая, когда линейная инволюция не приводится к данному виду линейной заменой координат, а именно:  $R(x, y) = (x, y)$  и  $R(x, y) = (-x, -y)$ . В первом случае единственная обратимая система — это  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ , и ее динамика тривиальна. Во втором случае система  $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$  обратима тогда и только тогда, когда обе функции  $P$  и  $Q$  — четные:  $P(-x, -y) = P(x, y), Q(-x, -y) = Q(x, y)$ . Симметричное состояние равновесия — всегда неподвижная точка инволюции. В рассматриваемом случае такая точка единственна (это начало координат), и, значит, для существования симметричного равновесия необходимо наложить на систему два независимых условия типа равенства ( $P(0, 0) = 0$  и  $Q(0, 0) = 0$  в выбранных координатах). Таким образом, если инволюция имеет вид  $R(x, y) = (-x, -y)$ , то существование симметричного равновесия — это бифуркация коразмерности 2, а их мы здесь не рассматриваем.

Итак, мы считаем, что инволюция имеет вид  $R(x, y) = (x, -y)$ . Тогда система  $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$  обратима тогда и только тогда, когда  $P(x, -y) = -P(x, y), Q(x, -y) = Q(x, y)$ . Мы будем считать, что рассматриваемое векторное поле достаточно гладкое. Тогда условие обратимости записывается в виде  $P(x, y) = yf(x, y^2), Q(x, y) = g(x, y^2)$ , где  $f$  и  $g$  — произвольные достаточно гладкие функции (и  $g(0, 0) = 0$ ). Таким образом, обратимая система в окрестности симметричного состояния равновесия имеет вид

$$\dot{x} = yf(x, y^2), \quad \dot{y} = g(x, y^2). \quad (2.1)$$

Матрица линеаризации  $A$  обратимого векторного поля (2.1) в симметричном состоянии равновесия в нуле имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $\alpha = f(0, 0)$  и  $b = g'_x(0, 0)$ , а собственные числа матрицы  $A$  равны  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha\beta}$ . В общем случае  $\alpha\beta \neq 0$ , и состояние равновесия является либо седлом (если  $\alpha\beta < 0$ ), либо центром (если  $\alpha\beta > 0$ ). В последнем случае собственные числа чисто мнимые, что означает, что траектории из малой окрестности состояния равновесия должны вращаться вокруг него и, следовательно, пересекать линию  $y = 0$  более чем в одной точке. Так как  $y = 0$  — линия неподвижных точек инволюции  $R$ , то все эти траектории замкнуты, то есть состояние равновесия окружено непрерывным семейством периодических траекторий и действительно является центром (в частности, оно устойчиво по Ляпунову).

Вырожденный случай отвечает  $\alpha\beta = 0$ , при этом  $\lambda_{1,2} = 0$  — двукратное собственное значение. Если  $\alpha \neq 0$ , то функция  $f$  не обращается в нуль в окрестности начала координат, поэтому как сама система, так и любая достаточно близкая к ней обратимая система

могут иметь равновесия только при  $y = 0$ , то есть только симметричные равновесия. Соответственно, асимптотически устойчивых равновесий в этом случае возникать не может. Вообще, система в данном случае интегрируема в окрестности нуля: интегральные кривые задаются уравнением

$$\frac{y^2}{2} = p(x, C),$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а гладкая функция  $p$  определяется как решение задачи Коши

$$\frac{dp}{dx} = \frac{g(x, 2p)}{f(x, 2p)}, \quad p(0, C) = C$$

(напомним, что  $f \neq 0$ ). Соответственно, динамика в этом случае всегда консервативна. В частности, если имеется невырожденное параболическое состояние равновесия (то есть  $g'_x(0, 0) = 0$  и  $f(0, 0) \neq 0$ ,  $g''_{xx}(0, 0) \neq 0$ ), то при общем однопараметрическом возмущении в классе обратимых систем в одну сторону по параметру состояние равновесия исчезает, а в другую — равновесие распадается на симметричные центр и седло с симметричной петлей сепаратрисы, охватывающей центр, полностью аналогично бифуркации параболического равновесия в гамильтоновых системах.

В случае  $\alpha = 0$  ситуация отличается от гамильтоновой. Мы рассматриваем только бифуркации коразмерности 1, то есть мы будем в дальнейшем предполагать  $\beta \neq 0$  в матрице  $A$ . В этом случае  $g'_x \neq 0$ , поэтому мы можем сделать замену переменной  $x$  так, что  $g(x, y^2) \equiv x$ . Тогда произвольная обратимая система, близкая к (2.1), принимает вид

$$\dot{x} = y(\varepsilon + ax + by^2 + O(x^2 + y^4)), \quad \dot{y} = x, \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Нормировкой  $y \rightarrow Y\delta$ ,  $x \rightarrow X\delta^2$ ,  $t \rightarrow \tau/\delta$  на малый масштабный фактор  $\delta$  система приводится к виду

$$\dot{X} = Y(E + aX + bY^2 + O(\delta)), \quad \dot{Y} = X,$$

где параметр  $E = \varepsilon/\delta^2$  может пробегать произвольные конечные значения. Несложно проверить, что для типичных значений  $a$  и  $b$  (это  $b > 0$  или  $b < 0, a \neq 0, a^2 \neq 8|b|$ , см. ниже) малые члены  $O(\delta)$  не влияют на бифуркации фазовых портретов при изменении  $E$ . Таким образом, если мы эти члены отбросим и вернемся к неотмасштабированным переменным, то получим версальное семейство:

$$\dot{x} = y(\varepsilon + ax + by^2), \quad \dot{y} = x.$$

Деформации фазового портрета показаны на рисунке 1. Симметричное состояние равновесия в нуле не исчезает при изменении  $\varepsilon$ , но меняет устойчивость: при  $\varepsilon < 0$  это центр, а при  $\varepsilon > 0$  — седло. Других симметричных равновесий здесь не возникает, зато при переходе в область  $b\varepsilon < 0$  из нуля рождается пара асимметричных состояний равновесия, лежащих на оси  $x = 0$ . При  $b > 0$  оба асимметричных равновесия — седла, их сепаратрисы совпадают и образуют контур, ограничивающий ячейку, заполненную периодическими траекториями. Как мы видим, динамика в случае  $b > 0$  консервативна (хотя дивергенция векторного поля в асимметричных седлах отлична от нуля при  $a \neq 0$  и интегрирующий множитель имеет, соответственно, особенность в этих точках). По-настоящему неконсервативная динамика возникает в случае  $b < 0$ . Здесь при  $a \neq 0$  одно из асимметричных равновесий, рождающихся при  $\varepsilon > 0$ , асимптотически устойчиво, а другое — асимптотически неустойчиво.

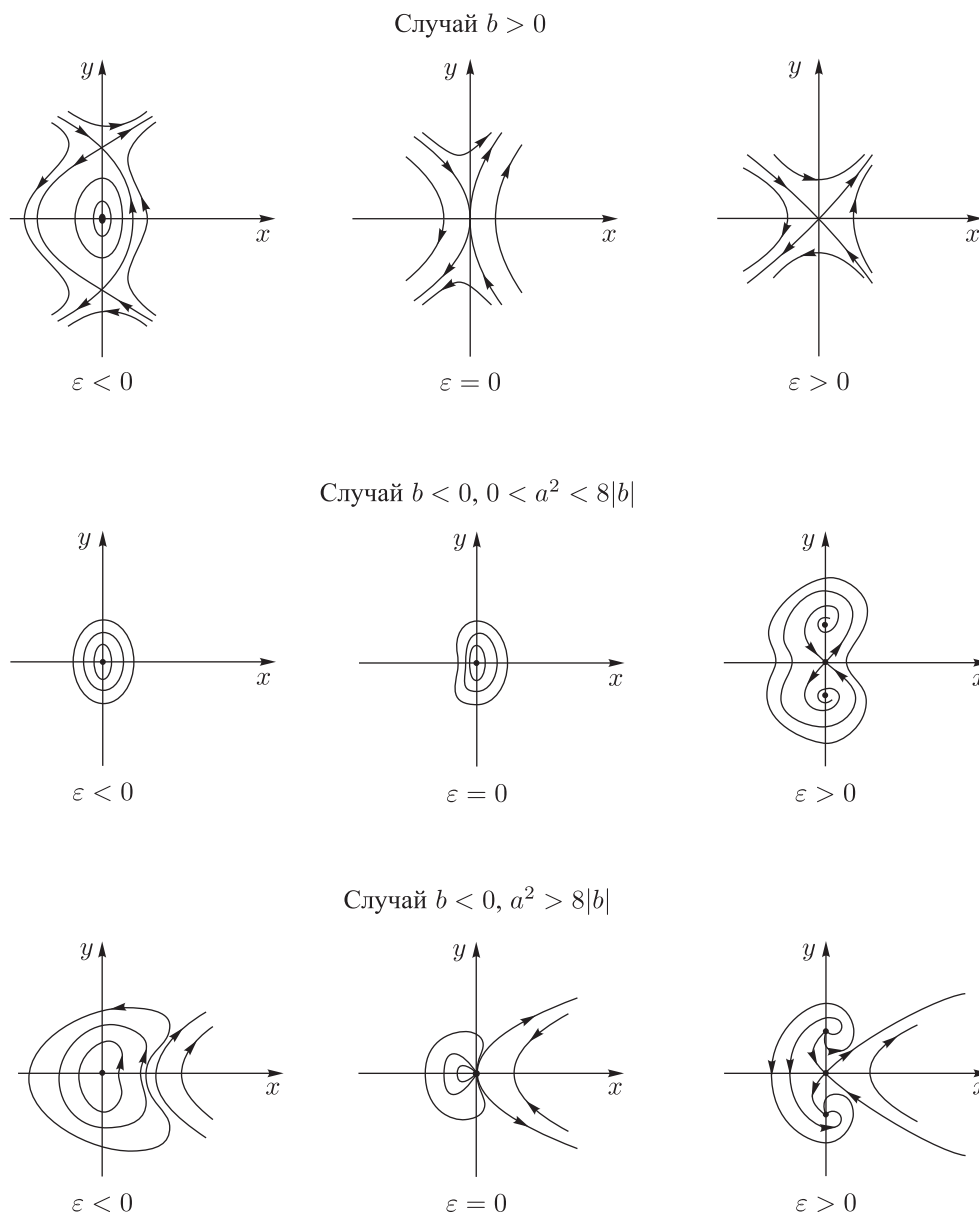


Рис. 1. Фазовые портреты версальных семейств.

Отметим, что хотя топологический тип состояний равновесий при  $\varepsilon > 0$  один и тот же при всех  $a \neq 0$ , фазовые портреты при  $a^2 > 8|b|$  и  $0 < a^2 < 8|b|$  различны (в частности, асимметричные состояния равновесия — узлы при  $a^2 > 8|b|$  и фокусы при  $0 < a^2 < 8|b|$ ). Разные типы имеет и симметричное состояние равновесия при  $\varepsilon = 0$ : это центр при  $0 < a^2 < 8|b|$ , а при  $a^2 > 8|b|$  оно неустойчиво и имеет эллиптический и параболический секторы.

Бифуркации в общих двухпараметрических семействах обратимых векторных полей на плоскости изучены в [30] (см. также недавнюю книгу [16]), там же повторены результаты [20], касающиеся бифуркаций коразмерности 1; в обеих работах были использованы другие версальные семейства.

### 3. Двумерные обратимые диффеоморфизмы

Теперь рассмотрим аналог описанных бифуркаций для двумерных обратимых отображений в окрестности симметричной неподвижной точки. Такие отображения возникают, в частности, как отображения Пуанкаре в окрестности симметричной периодической траектории трехмерного обратимого векторного поля. Удобно выбрать секущую к симметричной периодической траектории  $\gamma$  таким образом, чтобы она была  $R$ -инвариантна и содержала все точки множества  $Fix(R)$  из некоторой малой окрестности точки ее пересечения с  $\gamma$ . Заметим, что получаемое отображение Пуанкаре сохраняет ориентацию, и именно такие обратимые отображения в окрестности симметричной неподвижной точки мы будем рассматривать. Как и в рассмотренном выше случае обратимых векторных полей на плоскости, мы считаем, что в подходящих координатах  $(x, y)$  около неподвижной точки  $(0, 0)$  инволюция действует как  $R: (x, y) \rightarrow (x, -y)$ .

Матрица линеаризации  $A$  обратимого отображения  $T$  в симметричной неподвижной точке удовлетворяет соотношению  $RAR = A^{-1}$ , поэтому если  $\lambda$  — ее собственное число, то  $\lambda^{-1}$  также является собственным числом. Таким образом, в общем случае имеем либо эллиптическую точку ( $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$ ,  $\alpha \neq 0, \pi$ ), либо ориентируемое седло ( $\lambda_{1,2} = \{\lambda, \lambda^{-1}\}$ ,  $0 < \lambda < 1$ ), либо неориентируемое седло ( $\lambda_{1,2} = \{\lambda, \lambda^{-1}\}$ ,  $-1 < \lambda < 0$ ).

Динамика обратимого отображения возле эллиптической точки напоминает динамику вблизи равновесия типа центр: в общем случае эллиптическая точка окружена семейством замкнутых инвариантных КАМ-кривых [25], которые заполняют множество почти полной меры в малой окрестности неподвижной точки. Ограничение отображения на КАМ-кривую сопряжено повороту на иррациональный угол; при удалении от неподвижной точки число вращения меняется монотонно, то есть число вращения различно на различных КАМ-кривых. Однако КАМ-кривые заполняют окрестность неподвижной точки не полностью: рациональным числам вращения отвечают резонансные зоны между КАМ-кривыми, и динамика в этих зонах в типичном случае хаотическая. Заметим также, что при изменении аргумента  $\alpha$  комплексных собственных чисел  $\lambda_{1,2}$  (если отображение зависит от параметра) эллиптическая точка непрерывно бифурцирует: когда  $\alpha/2\pi$  проходит через рациональное значение  $p/q$  от неподвижной точки рождаются точки периода  $q$  (и формируется соответствующая резонансная зона). Хотя все это очень напоминает поведение вблизи эллиптической точки сохраняющих площадь отображений, имеется и существенное отличие: в резонансных зонах могут возникать асимметричные асимптотически устойчивые и асимптотически неустойчивые периодические точки [13].

Переход от эллиптической точки к седлу происходит при значениях параметров, отвечающих двукратному собственному числу  $\lambda_{1,2} = 1$  или  $\lambda_{1,2} = -1$ . В типичном однопараметрическом семействе обратимых диффеоморфизмов здесь имеется жорданова клетка матрицы линеаризованного отображения, то есть матрица  $A$  имеет только один собственный вектор, который мы обозначим  $\xi$ . Так как в силу обратимости  $A\xi = \lambda\xi$  влечет  $A(R\xi) = \lambda^{-1}R\xi$  и, в нашем случае,  $\lambda = \lambda^{-1}$ , то получаем, что либо  $R\xi = \xi$ , либо  $R\xi = -\xi$ . В первом случае (так же, как в случае обратимых векторных полей с  $\alpha \neq 0$  в (2.2)) бифуркации в общем однопараметрическом семействе обратимых диффеоморфизмов аналогичны соответствующим бифуркациям симплектических диффеоморфизмов плоскости при переходе через параболическую точку. Так, если  $\lambda = 1$  и  $R\xi = \xi$ , то данное отображение (а также любое близкое к нему обратимое гладкое отображение) в окрестности симметричной неподвижной точки можно привести к следующему виду [22]:

$$\bar{x} = x + 2y + h_n(x + y) + \dots, \quad \bar{y} = y + h_n(x + y) + \dots, \quad (3.1)$$

где функция  $h_n$  — полином порядка  $n$ , а многоточия означают члены порядка  $n+1$  и выше, то есть с точностью до членов сколь угодно высокого порядка отображение в окрестности нуля аппроксимируется сохраняющим площадь отображением. В общем однопараметрическом семействе функция  $h_n(u)$  имеет вид  $h(u) = \varepsilon + au^2 + \dots$ , где  $a \neq 0$ . Аналогичная консервативная нормальная форма может быть выписана и в случае  $\lambda = -1$ :

$$\bar{x} = -x - 2y - h_n(x+y) + \dots, \quad \bar{y} = -y - h_n(x+y) + \dots, \quad (3.2)$$

где  $h_n$  — нечетный полином порядка  $n$ . В общем однопараметрическом семействе такая функция  $h_n(u)$  имеет вид  $h(u) = \varepsilon u + au^3 + \dots$ ,  $a \neq 0$ .

Отметим, что хотя мы и получаем консервативные аппроксимации сколь угодно высокого порядка, полностью консервативной динамика не становится: возле симметричных эллиптических траекторий, которые рождаются при данных бифуркациях, хаотическая динамика в резонансных зонах, вообще говоря, неконсервативна, как мы уже отмечали. Кроме того, неконсервативное поведение возникает в стохастическом слое вблизи расщепленных сепаратрис (см. ниже).

Рассмотрим теперь случай  $R\xi = -\xi$ . Заметим, что если отображение обратимо относительно инволюции  $R$ , то  $R' = T \circ R$  тоже является инволюцией, и отображение обратимо также и относительно  $R'$ :  $(T \circ R) \circ T \circ (T \circ R) = R \circ T^{-1} \circ T \circ R \circ T^{-1} = T^{-1}$ . В случае  $\lambda = -1$ , если  $R\xi = -\xi$ , то  $AR\xi = \xi$ , где  $A$  — матрица линеаризации отображения  $T$  в неподвижной точке. Поэтому в координатах, в которых инволюция  $R'$  линейна, мы получаем  $R'\xi = \xi$ , и поэтому отображение вновь приводится к нормальной форме (3.2).

Остается рассмотреть случай  $R\xi = -\xi$  с  $\lambda = 1$ . Как известно, отображение вблизи неподвижной точки с мультипликаторами, равными единице, может быть аппроксимировано, до любого конечного порядка малости, сдвигом на единицу времени по траекториям некоторой автономной системы дифференциальных уравнений [29]. Такая система называется потоковой нормальной формой. Если  $v(u)$  — векторное поле на плоскости переменных  $u = (x, y)$ , такое, что сдвиг на единицу времени по траекториям соответствующей системы аппроксимирует отображение  $T$  вблизи неподвижной точки с точностью до членов степени  $n$ , то сдвиг на единицу времени по траекториям системы, заданной векторным полем  $w(u) = -Rv(Ru)$ , аппроксимирует отображение  $RT^{-1}R$  также с точностью до членов степени  $n$ . Если  $T$  реверсивно, то  $T = RT^{-1}R$ ; таким образом, имеем, что сдвиг на единицу времени по траекториям системы, заданной векторным полем  $w$ , аппроксимирует сдвиг по траекториям системы, заданной векторным полем  $v$ , (и отображение  $T$ ) с точностью до членов степени  $n$ ; следовательно, то же самое верно и для векторного поля  $(v+w)/2$ . Последнее векторное поле обратимо по конструкции, поэтому получаем, что реверсивное отображение вблизи неподвижной точки с мультипликаторами, равными единице, имеет обратимую потоковую нормальную форму до любого порядка малости.

Неподвижная точка отображения отвечает состоянию равновесия потоковой нормальной формы, матрица линеаризации в состоянии равновесия получается логарифмированием матрицы линеаризации исходного отображения в неподвижной точке (см. подробнее в [26]). Соответственно, потоковая нормальная форма для обратимого отображения вблизи неподвижной точки с парой мультипликаторов, равных единице, имеет вид (2.1). Более того, случай  $R\xi = -\xi$  отвечает  $\alpha = 0$  (2.2), поэтому нормальная форма может быть записана в виде (2.3).

Таким образом, бифуркации рассматриваемых отображений происходят так же, как изображено на рисунке 2. Конечно, траектории отображения не совпадают с фазовыми кривыми потоковой нормальной формы, но отслеживают их с достаточно малыми поправками

ми. В частности, паре из асимптотически устойчивого и неустойчивого равновесий в случае  $b < 0$  отвечают асимптотически устойчивая и асимптотически неустойчивая неподвижные точки отображения, то есть мы имеем здесь бифуркацию потери симметрии. Седловым состояниям равновесия в нормальной форме отвечают седловые неподвижные точки в исходном отображении, симметричным состояниям равновесия типа центр — эллиптические неподвижные точки, симметричным периодическим траекториям — КАМ-кривые (для иррациональных чисел вращения, удовлетворяющих диофантовым условиям).

Важное отличие от случая векторных полей состоит в том, что устойчивые и неустойчивые сепаратрисы для типичного отображения не совпадают, как в нормальной форме (случаи  $b > 0$  и  $b < 0$ ,  $a^2 > 8|b|$ ), а пересекаются трансверсально, что приводит к хаотической динамике в малой окрестности сепаратрис (образуется так называемый стохастический слой). При этом в общих однопараметрических семействах таких диффеоморфизмов появляются вторичные касания устойчивой и неустойчивой сепаратрис. Это приводит к тому, что в стохастическом слое существуют асимптотически устойчивые, асимптотически неустойчивые и эллиптические периодические траектории (так называемое явление смешанной динамики, для которого характерно, что консервативное и неконсервативное поведение в каком-то смысле неотделимы друг от друга) [6, 21]. Таким образом, даже в случае  $b > 0$ , когда динамика в нормальной форме консервативна, в исходном отображении можно обнаружить неконсервативное поведение.

#### 4. Обратимые 3-мерные и 4-мерные векторные поля

Рассмотрим теперь трехмерное обратимое относительно гладкой инволюции  $R$  векторное поле  $v$ , имеющее симметричное состояние равновесия  $O$ . Пусть  $O$  находится в начале координат. По теореме Бохнера–Монтгомери всегда можно так выбрать координаты  $(x, y, z)$ , что действие инволюции  $R$  в окрестности начала координат будет линейным. Линеаризация поля  $v$  в точке  $O$  есть линейный оператор  $A$ , удовлетворяющий тождеству  $RA = -AR$ . Спектр такого оператора состоит из чисел  $(0, \lambda, -\lambda)$  (заметим, что  $RA = -AR$  влечет  $\det(A) = -\det(A) = 0$  из-за нечетности размерности пространства).

Далее нужно рассмотреть два различных случая в зависимости от размерности множества неподвижных точек инволюции — подпространства  $Fix(R)$ . Эти случаи —  $\dim(Fix(R)) = 1$  и  $\dim(Fix(R)) = 2$  (как и раньше, мы не рассматриваем случай  $\dim(Fix(R)) = 0$ , потому что наличие состояния равновесия в единственной неподвижной точке инволюции — это явление коразмерности 3 для векторных полей в трехмерном пространстве; случай  $\dim(Fix(R)) = 3$  также неинтересен, так как единственное векторное поле, обратимое относительно тождественного отображения, — это  $v = 0$ ).

Тогда можно считать, что инволюция действует как  $R: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ , и общий вид такого обратимого векторного поля следующий:

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad \dot{z} = xh_1(x, y, z) + yh_2(x, y, z), \quad (4.1)$$

где функции  $f, g, h_{1,2}$  — четные по  $(x, y)$  (инвариантные относительно действия инволюции). Линия  $Fix(R)$  в данном случае — ось  $z$ . Система имеет состояние равновесия на этой оси при условии  $f(0, 0, z) = 0$  и  $g(0, 0, z) = 0$ . Это два уравнения относительно одной переменной  $z$ ; следовательно, наличие у системы вида (4.1) симметричного состояния равновесия — это явление коразмерности 1. Соответственно, мы должны рассматривать бифуркации в однопараметрических семействах систем вида (4.1). При этом, поскольку



мы не рассматриваем здесь бифуркации коразмерности 2 и выше, в момент существования симметричного состояния равновесия мы будем накладывать на систему дополнительные условия типа неравенства. В частности, предполагая, что в момент бифуркации симметричное состояние равновесия находится в нуле, мы потребуем, чтобы следующий 2-вектор был ненулевым:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0. \quad (4.2)$$

Поскольку  $f$  и  $g$  — четные по  $(x, y)$  функции, то матрица линеаризации  $A$  системы (4.1) в нуле имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta_1 & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\alpha_1 = f_z(0, 0, 0)$ ,  $\alpha = g_z(0, 0, 0)$ ,  $\beta_1 = h_1(0, 0, 0)$  и  $\beta = h_2(0, 0, 0)$ . В силу (4.2) имеем  $\alpha_1^2 + \alpha^2 \neq 0$ , и мы всегда можем выбрать координаты  $(x, y)$  так, чтобы  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha \neq 0$ . Мы также предположим  $\beta \neq 0$ , и тогда дополнительной заменой переменной  $y$  добиваемся  $\beta_1 = 0$ . Таким образом, система принимает вид

$$\dot{x} = \mu + \dots, \quad \dot{y} = \alpha z + \dots, \quad \dot{z} = \beta y + \dots, \quad (4.3)$$

где  $\mu$  — малый параметр, многоточия обозначают члены второго порядка малости и выше, четные по  $(x, y)$  в уравнениях для  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  и нечетные по  $(x, y)$  в уравнении для  $\dot{z}$ , и коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  — ненулевые.

Симметричное состояние равновесия у этой системы существует при  $\mu = 0$ , при этом собственные числа матрицы линеаризации  $A$  равны  $0, \pm\lambda$ , где  $\lambda = \sqrt{-\alpha\beta}$ . В случае  $\alpha\beta < 0$  (квазигиперболический случай) собственные числа  $(\lambda, -\lambda)$  ненулевые и вещественные. Здесь в окрестности нуля имеется гладкое центральное многообразие: гладкая инвариантная кривая, которая при  $\mu = 0$  касается в нуле оси  $x$  — собственного направления, отвечающего нулевому собственному числу. Трансверсально центральному многообразию поведение седловое: мы имеем сжатие по направлению, отвечающему собственному числу  $-\lambda$ , и растяжение по направлению, отвечающему  $\lambda$ ; при всех малых  $\mu$  все траектории с начальными условиями вне центрального многообразия покидают окрестность нуля либо при  $t \rightarrow +\infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом остается исследовать поведение на центральном многообразии. Хорошо известно (см. [16]), что локальное центральное многообразие обратимого векторного поля в окрестности симметричного состояния равновесия инвариантно относительно действия инволюции. Это означает в нашем случае, что центральное многообразие — это гладкая инвариантная кривая вида  $\{y = p(x, \mu), z = q(x, \mu)\}$ , где  $p$  — нечетна, а  $q$  — четна по  $x$ . Ограничение системы на такую кривую имеет вид  $\dot{x} = \psi(x, \mu)$  с четной по  $x$  функцией  $\psi$ . В общем случае имеем

$$\dot{x} = \mu + ax^2 + o(x^2),$$

где  $a \neq 0$ . Таким образом, система (4.3) имеет при  $\mu = 0$  состояние равновесия типа седло-седло [26], которое при  $a\mu < 0$  распадается на два асимметричных седла разных типов, соединенных симметричной гетероклинической траекторией, а при  $a\mu > 0$  равновесие исчезает. Иными словами, бифуркация седло-седла в обратимых трехмерных векторных полях в случае  $\dim(\text{Fix}(R)) = 1$  практически не отличается от общего случая.

Отметим, что центрально-неустойчивое многообразие седло-седла при  $\mu = 0$  двумерно, поэтому его неустойчивая часть (где все траектории выходят из седло-седла) может трансверсально пересекать линию неподвижных точек инволюции в некоторой точке, отличной от нуля. Соответствующая траектория симметрична и, следовательно, образует гомоклиническую траекторию к седло-седлу, то есть принадлежит пересечению неустойчивой части центрально-неустойчивого многообразия с устойчивой частью центрально-устойчивого многообразия. В общем случае можно предполагать это пересечение трансверсальным. Тогда при исчезновении седло-седла рождается симметричная седловая периодическая траектория. Если в бифуркационный момент имеется более одной симметричной гомоклинической траектории, то при исчезновении седло-седла рождается нетривиальное симметричное гиперболическое множество. Если седло-седлу имеет асимметричную гомоклиническую траекторию, то существует и другая асимметричная гомоклиническая траектория, симметричная исходной. Из этой пары после исчезновения седло-седла также рождается нетривиальное симметричное гиперболическое множество (о бифуркациях гомоклинических петель седло-седла см. в [27]).

Рассмотрим теперь квазиэллиптический случай. Здесь  $\alpha\beta > 0$  в (4.3) и состояние равновесия при  $\mu = 0$  имеет одно нулевое и пару чисто мнимых комплексно-сопряженных чисел  $\pm i\omega$  (где  $\omega = \sqrt{\alpha\beta}$ ). Здесь, вообще говоря, не существует одномерного центрального многообразия, то есть редукцию к меньшей размерности полностью провести нельзя. Тем не менее, достаточно подробное исследование можно выполнить с помощью метода нормальных форм: нерезонансные члены можно убивать нормализующими преобразованиями, которые не меняют вид инволюции  $R: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . Таким образом, с точностью до членов сколь угодно высокого порядка малости система (4.3) приводится (ср. [16]) к нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu + f(x^2, y^2 + z^2), \\ \dot{y} = xyg(x^2, y^2 + z^2) - \Omega(x^2, y^2 + z^2)z, \\ \dot{z} = xzg(x^2, y^2 + z^2) + \Omega(x^2, y^2 + z^2)y, \end{cases} \quad (4.4)$$

где  $f(0, 0) = 0$ ,  $\Omega(0, 0) = \omega \neq 0$ , и мы будем предполагать  $g(0, 0) \neq 0$ . В полярных координатах  $y + iz = re^{i\phi}$  система записывается

$$\dot{x} = \mu + p(x^2, r^2), \quad \dot{r} = xrg(x^2, r^2), \quad \dot{\phi} = \Omega(x^2, r^2) \neq 0,$$

и мы видим, что в нормальной форме эволюция переменных  $(x, r)$  не зависит от  $\phi$ , а эволюция переменной  $\phi$  тривиальна. Система для переменных  $(x, r)$  обратима относительно инволюции  $x \rightarrow -x$ . В главном порядке (после дополнительного масштабирования) эта система превращается в

$$\dot{x} = \mu + ax^2 + br^2, \quad \dot{r} = xr. \quad (4.5)$$

Будем считать, что коэффициенты  $a$  и  $b$  отличны от нуля. Мы получаем 4 случая в зависимости от комбинаций знаков  $a$  и  $b$ . Их легко изучить, соответствующие фазовые портреты в полуплоскости  $r \geq 0$  приведены на рисунке 2. Заметим, что система (4.5) возникает как частный случай нормальной формы для бифуркаций состояний равновесия с собственными числами  $(0, \pm i\omega)$  в семействах общих и бездивергентных векторных полей; более подробный ее анализ см. в [4, 9, 10, 15, 18].

Фазовые портреты нормальной формы (4.4) получаются из фазовых портретов системы (4.5) вращением вокруг оси  $x$ . Так, асимметричным состояниям равновесия (устойчивым,

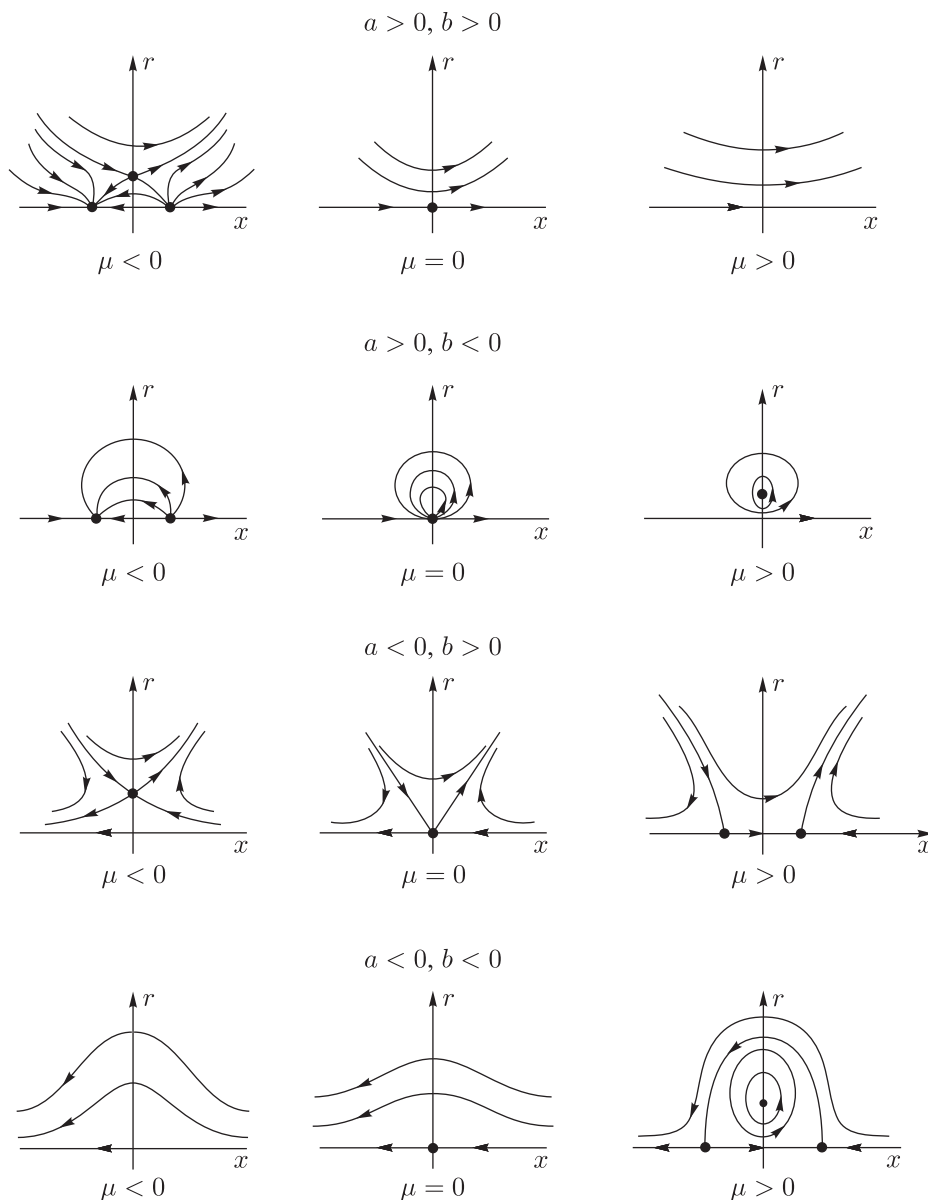


Рис. 2. Фазовые портреты нормальных форм.

неустойчивым, седловым) системы (4.5) на оси  $r = 0$  отвечают асимметричные состояния равновесия такого же типа в системе (4.4) (точнее, седла становятся седло-фокусами: седла, устойчивые на оси  $x$ , приобретают двумерное неустойчивое многообразие, а неустойчивые на оси  $x$  — двумерное устойчивое многообразие). Симметричным состояниям равновесия (седла и центры) на оси ( $x = 0, r \neq 0$ ) отвечают симметричные периодические траектории системы (4.4). Симметричным периодическим траекториям системы (4.5) (случай  $b < 0, \mu > 0$ ) отвечают симметричные двумерные инвариантные торы (4.4). При малых сохраняющих обратимость возмущениях (в частности, при переходе от нормальной формы к полной исходной системе) состояния равновесия и периодические траектории системы (4.5) сохраняются. Симметричные двумерные инвариантные торы все, вообще говоря, не сохраняются, но на их месте остается множество почти полной меры, заполненное

КАМ-торами (см. [25]). Гетероклиническая связка (отрезок оси  $x$ ) между асимметричными седло-фокусами в случаях  $a < 0, \mu > 0$  не сохраняется в полной системе (которая не обязана, в отличие от нормальной формы (4.4), иметь вращательную симметрию), но может существовать для дискретной последовательности значений параметра  $\mu$  — эта связка симметрична и возникает, когда одномерная неустойчивая сепаратриса седло-фокуса пересекает одномерную же линию  $Fix(R)$ , то есть это явление коразмерности 1. Отметим также, что в случае  $a < 0, b < 0, \mu > 0$  в нормальной форме (4.4) двумерные сепаратрисы седло-фокусов совпадают. Это вырождение бесконечной коразмерности, обусловленное вращательной симметрией, поэтому в исходной системе следует ожидать расщепления двумерных сепаратрис и возникновения их трансверсальных пересечений. Более того, одномерные сепаратрисы могут ложиться на двумерные, то есть подобно тому, как это происходит в случае бифуркаций состояний равновесия с собственными числами  $(0, \pm i\omega)$  в векторных полях общего типа [15, 28], образуются гомоклинические петли седло-фокуса и шильниковский хаос.

Перейдем к случаю  $\dim(Fix(R)) = 2$ . Здесь предполагается (без ограничения общности), что инволюция действует как  $R: (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ , и общий вид гладкого обратимого векторного поля следующий:

$$\dot{x} = zf(x, y, z^2), \quad \dot{y} = zg(x, y, z^2), \quad \dot{z} = h(x, y, z^2). \quad (4.6)$$

Прежде чем начинать исследование бифуркаций, сделаем несколько общих замечаний о поведении систем вида (4.6). Во-первых, отличные от состояний равновесия траектории всегда пересекают плоскость неподвижных точек инволюции  $z = 0$  трансверсально. Поэтому для любой симметричной периодической траектории, т. е. такой траектории, которая пересекает  $z = 0$  дважды, все близкие траектории также будут пересекать  $z = 0$  дважды и, следовательно, будут симметричными периодическими траекториями. Таким образом, симметричные периодические траектории системы (4.6) всегда заполняют открытые области. Другое наблюдение состоит в том, что симметричные состояния равновесия здесь определяются единственным соотношением  $h(x, y, 0) = 0$ , то есть в общем случае такие равновесия заполняют кривые на плоскости  $z = 0$ . Нулевое собственное число отвечает направлению, касательному к этой линии. Трансверсально кривой состояний равновесия поведение в типичном случае либо около седла (при  $h'_x f + h'_y g > 0$ ), либо около центра (при  $h'_x f + h'_y g < 0$ ). Все траектории вблизи линии центров вращаются вокруг этой линии, то есть они — симметричные периодические. Линия седловых равновесий является пересечением инвариантных двумерных устойчивого и неустойчивого многообразий. Если какая-либо траектория из неустойчивого многообразия пересекает плоскость  $z = 0$ , то, по обратимости, эта траектория и принадлежит устойчивому многообразию, и образует гомоклиническую петлю. Более того, так как пересечение траектории с плоскостью  $z = 0$  всегда трансверсально, то все близкие траектории в неустойчивом многообразии также обязаны пересекать эту плоскость, то есть симметричные гомоклинические петли также образуют однопараметрические семейства. Очевидно, поверхности, образованные семействами гомоклинических петель, ограничивают области, заполненные симметричными периодическими траекториями.

Как мы видим, для исследования динамики системы вида (4.6) необходимо найти линии симметричных состояний равновесия, определить области, заполненные симметричными периодическими траекториями, и понять, каким образом симметричные траектории соседствуют в фазовом пространстве с несимметричными траекториями. Последние не пересекают плоскость  $z = 0$  и, следовательно, лежат целиком по одну сторону от нее. По обратимости, поведение в области  $z < 0$  полностью восстанавливается по поведению в области

$z > 0$ . Для исследования траекторий, лежащих в области  $z > 0$ , мы можем сделать замену переменных  $z^2 = u$  и времени  $z dt = d\tau$ . Система принимает вид

$$\dot{x} = f(x, y, u), \quad \dot{y} = g(x, y, u), \quad \dot{u} = 2h(x, y, u).$$

В принципе, здесь возможно любое, сколь угодно сложное поведение, но, как мы увидим, при переходе состояния равновесия через бифуркацию потери симметрии в случае коразмерности 1 эта система в главном порядке линейна, и ее неблуждающее множество состоит из единственного равновесия, что позволяет исследовать соответствующую бифуркацию достаточно полно.

Перейдем к рассмотрению бифуркаций симметричных состояний равновесия. Отметим, что так как такие состояния равновесия составляют кривые, то тип состояния равновесия может изменяться при движении вдоль кривой, то есть бифуркации могут здесь происходить, даже когда система не зависит от параметров (ср. [8]). Тем не менее, мы заинтересованы в первую очередь в бифуркации потери симметрии, а она в данном классе систем оказывается явлением коразмерности 1. Действительно, пусть  $(x_0, y_0, 0)$  — состояние равновесия (то есть  $h(x_0, y_0, 0) = 0$ ). Если хотя бы одна из функций  $f, g$  не обращается в нуль в точке  $(x_0, y_0, 0)$ , то система в малой окрестности этой точки интегрируема. Пусть, например,  $f(x_0, y_0, 0) \neq 0$ . Тогда мы можем переписать систему (4.6) в окрестности точки  $(x_0, y_0, 0)$  в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y, u)}{f(x, y, u)}, \quad \frac{du}{dx} = 2 \frac{h(x, y, u)}{f(x, y, u)},$$

где  $u = z^2$ . Пусть  $u = p(x, C_1, C_2)$ ,  $y = q(x, C_1, C_2)$  — решение задачи Коши  $y(x_0) = C_1$ ,  $u(x_0) = C_2$  для этого уравнения. Вблизи  $y = y_0$ ,  $u = 0$ ,  $x = x_0$  числа  $C_1, C_2$  являются гладкими функциями от  $(x, y, u = z^2)$ , и они, очевидно, служат интегралами системы (4.6). Мы можем, в частности, принять  $C_1$  за новую переменную  $y$ . Тогда система (4.6) в окрестности точки  $(x_0, y_0, 0)$  примет вид

$$\dot{x} = z f(x, y, z^2), \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z}^2 = p(x, y, C).$$

Соответственно, на каждой инвариантной плоскости  $y = \text{const}$  мы имеем здесь интегрируемую систему, и задача о бифуркациях сводится к исследованию перестроек в семействах двумерных консервативных систем.

Таким образом, для того чтобы могла произойти бифуркация потери симметрии, необходимо потребовать  $f(x_0, y_0, 0) = 0$  и  $g(x_0, y_0, 0) \neq 0$ . Вместе с условием  $h(x_0, y_0, 0) = 0$  это три условия на две переменные  $x_0$  и  $y_0$ , то есть мы действительно имеем дело с вырождением коразмерности 1. Не уменьшая общности, полагаем  $x_0 = y_0 = 0$ . Заметим, что матрица линеаризации системы (4.6) в симметричном состоянии равновесия при выполнении условий  $f = g = 0$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет два независимых собственных вектора,  $\mathbf{e} = (\beta, -\alpha, 0)$  и  $\mathbf{f} = (0, 0, 1)$ , отвечающих нулевому собственному числу, причем

$$R\mathbf{e} = \mathbf{e}, \quad R\mathbf{f} = -\mathbf{f} \tag{4.7}$$

(если  $\alpha = \beta = 0$ , возьмем  $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ ). Как мы видим, наличие пары собственных векторов, удовлетворяющих условию (4.7), служит необходимым условием для бифуркации потери симметрии.

Наложим на систему вблизи нуля дополнительное условие типа неравенства:

$$(h'_x)^2 + (h'_y)^2 \neq 0.$$

Мы всегда можем выбрать координаты  $(x, y)$  так, чтобы  $h'_y \neq 0$ . Тогда мы можем выбрать переменную  $y$  так, что  $y \equiv h(x, y, z^2)$ . При этом условии потребуем  $g'_x \neq 0$ , что позволяет выбрать переменную  $x$  так, что  $x \equiv g(x, y, z^2)$ . Система (4.6) принимает вид

$$\dot{x} = z(\varepsilon + ax + by + cz^2 + O(x^2 + y^2 + z^4)), \quad \dot{y} = zx, \quad \dot{z} = y, \quad (4.8)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Потребуем  $c \neq 0$ . Тогда, после нормировки переменных  $z$  и  $y$ , мы можем считать  $c = -1$ . Получаем, что в главном порядке рассматриваемая бифуркация описывается нормальной формой

$$\dot{x} = z(\varepsilon + ax + by - z^2), \quad \dot{y} = zx, \quad \dot{z} = y. \quad (4.9)$$

При  $\varepsilon > 0$  у этой системы имеется пара асимметричных состояний равновесия вне плоскости  $z = 0$ :

$$O_{\pm} = (0, 0, \pm\sqrt{\varepsilon}).$$

Матрица линеаризации в  $O_+$  равна

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{\varepsilon} & b\sqrt{\varepsilon} & -2\varepsilon \\ \sqrt{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен равен

$$\lambda^3 - a\sqrt{\varepsilon}\lambda^2 - b\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}.$$

Получаем, что точка  $O_+$  асимптотически устойчива при

$$a < 0, \quad b < 0, \quad ab > 2. \quad (4.10)$$

Соответственно, точка  $O_-$  — асимптотически неустойчива в той же области значений параметров  $a, b$ . Для значений  $a$  и  $b$  из внутренней части дополнения к области (4.10) состояния равновесия  $O_{\pm}$  — седловые ( $O_+$  — с двумерным неустойчивым многообразием,  $O_-$  — с одномерным).

Отметим, что динамика нормальной формы (4.9) (и, следовательно, исходной системы в окрестности рассматриваемого состояния равновесия) достаточно проста. Действительно, пусть  $z > 0$ . После замены  $u = z^2$ ,  $z dt = d\tau$  система (4.9) становится линейной:

$$\dot{x} = \varepsilon + ax + by - u, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{u} = 2y.$$

Соответственно, при  $a, b$  из области

$$\{ab \neq 2\} \cup \{a \geq 0\} \cup \{b \geq 0\} \quad (4.11)$$



те ее траектории, которые не уходят на бесконечность, должны стремиться к состоянию равновесия ( $x = 0, y = 0, u = \varepsilon$ ). Для системы (4.9) это означает, что ее траектории либо уходят на бесконечность (для исходной системы это означает уход из малой окрестности нуля), либо стремятся к состоянию равновесия, либо пересекают плоскость неподвижных точек инволюции  $z = 0$ . По обратимости, то же самое верно и для траекторий из области  $z < 0$ . Так как траектория, пересекающая  $z = 0$  дважды, обязательно периодическая, получаем, что при  $a, b$  из области (4.11) все ограниченные траектории либо симметричные периодические, либо стремятся к состоянию равновесия. При этом фазовое пространство разбивается на области, заполненные либо симметричными периодическими траекториями, либо (при  $a, b$  из области (4.10) и  $\varepsilon > 0$ ) траекториями, соединяющими репеллер  $O_-$  с аттрактором  $O_+$ , либо неограниченными траекториями; границы областей составлены из линии симметричных состояний равновесия и сепаратрис седел (симметричных и, если есть, асимметричных).

В заключение рассмотрим пример коразмерности 1 бифуркации нарушения симметрии в четырехмерных векторных полях (следуя [16, 33]). Здесь  $\dim(\text{Fix}(R)) = 2$ , и матрица линеаризации  $A$  векторного поля в симметричном состоянии равновесия имеет двойное нулевое собственное число (с жордановой клеткой) и пару чисто мнимых. Рассматривается случай, когда существует базис  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ , такой, что

$$\begin{aligned} A\xi_0 &= 0, & A\xi_1 &= \xi_0, & A\xi_2 &= -\omega\xi_3, & A\xi_3 &= \omega\xi_2, \\ R\xi_0 &= -\xi_0, & R\xi_1 &= \xi_1, & R\xi_2 &= \xi_2, & R\xi_3 &= -\xi_3 \end{aligned}$$

(можно убедиться, что такой базис существует для открытого множества обратимых систем с парой нулевых собственных чисел у матрицы  $A$ ). В координатах  $x\xi_0 + y\xi_1 + u\xi_2 + v\xi_3$  действие  $R$  задается как  $R(x, y, u, v) = (-x, y, u, -v)$ . Убавая резонансные члены и отбрасывая члены высокого порядка малости, получаем укороченную нормальную форму [16]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\mu + ay + bx^2 + c(u^2 + v^2)), \\ \dot{u} = -v\omega + xu, \\ \dot{v} = \omega u + xv. \end{cases} \quad (4.12)$$

Удобно перейти к цилиндрическим координатам  $(x, y, s \cos \theta, s \sin \theta)$ . Для переменных  $(x, y, s)$  получаем трехмерную автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(\mu + ay + bx^2 + cs^2), \\ \dot{s} = sx \end{cases}$$

(здесь уравнение для  $\theta$  —  $\dot{\theta} = \omega$ ). В этой системе имеется инвариантная плоскость  $s = 0$ , и при  $b\mu < 0$  в ней рождаются асимметричные состояния равновесия с  $x \neq 0$ , которые образуют пару аттрактор–репеллер при  $a > 0, b < 0$ . Так же, как и система (4.9), данная нормальная форма может иметь области, заполненные симметричными периодическими траекториями. Учитывая вращение по переменной  $\theta$ , получаем, что в системе (4.12) им отвечают симметричные двумерные инвариантные торы — в исходной системе получаем область, где множество почти полной меры занято двумерными КАМ-торами.

## 5. Обратимые 3-мерные диффеоморфизмы

Далее мы рассмотрим реверсивные и сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы  $\mathbb{R}^3$ . Симметричная периодическая точка такого диффеоморфизма является неподвижной точкой отображения Пуанкаре  $T$ ; это отображение обратимо относительно некоторой инволюции  $R$ , и неподвижная точка симметрична относительно  $R$ . По определению обратимости,  $(T \circ R)^2 = id$ , то есть  $R' = T \circ R$  — тоже инволюция. Так как  $T = (T \circ R) \circ R$ , то  $T$  является произведением двух инволюций. Поэтому симметричная неподвижная точка  $O$  отображения  $T$  (то есть такая точка, что  $TO = O$  и  $RO = O$ ) является также и неподвижной точкой инволюции  $R'$ , то есть  $O \in \text{Fix}(R) \cap \text{Fix}(R')$  (верно и обратное). Отметим, что в случае, когда реверсивный диффеоморфизм получен как отображение Пуанкаре обратимого относительно линейной инволюции четырехмерного потока в окрестности симметричной периодической траектории, мы всегда имеем  $\dim(\text{Fix}(R)) = \dim(\text{Fix}(R'))$ , и именно этот случай мы будем здесь рассматривать.

Если  $\dim(\text{Fix}(R)) = \dim(\text{Fix}(R')) = 0$ , то наличие симметричной неподвижной точки у трехмерного отображения — это явление коразмерности 3, и мы такие вырожденные случаи здесь не рассматриваем. Поэтому мы будем считать, что  $\dim(\text{Fix}(R)) = \dim(\text{Fix}(R')) = 1$  или  $\dim(\text{Fix}(R)) = \dim(\text{Fix}(R')) = 2$  (в случае  $\dim(\text{Fix}(R)) = 3$ , имеем  $R = id$  по теореме Бохнера–Монтгомери, и в этом случае отображение  $T$  должно само быть инволюцией, то есть его динамика тривиальна).

Начнем со случая, когда множества  $\text{Fix}(R)$  и  $\text{Fix}(T \circ R)$  одномерны. Этот случай встречается, например, когда четырехмерное обратимое векторное поле имеет симметричную периодическую траекторию  $\gamma$ , а множество  $\text{Fix}(R)$  одномерно (пример такой ситуации дает одна из моделей кельтского камня [1, 14]). Тогда, выбирая секущую к  $\gamma$ , содержащую  $\text{Fix}(R)$  и инвариантную относительно инволюции, получим рассматриваемый случай; пересечение траектории  $\gamma$  на секущей дает симметричную неподвижную точку.

Так как  $\text{Fix}(R)$  и  $\text{Fix}(T \circ R)$  одномерны, наличие у них пересечения (рассматриваемой симметричной неподвижной точки  $O$ ) — это случай коразмерности 1 (в общем однопараметрическом семействе обратимых диффеоморфизмов гладкие кривые  $\text{Fix}(R)$  и  $\text{Fix}(T \circ R)$  гладко зависят от параметра). Как всегда, будем считать, что инволюция  $R$  в окрестности неподвижной точки  $O$  действует линейно. По обратимости, если  $\lambda$  — мультипликатор точки  $O$  (собственное число матрицы линеаризации  $A$  отображения  $T$  в  $O$ ), то  $\lambda^{-1}$  тоже должно быть ее мультипликатором. Для трехмерного сохраняющего ориентацию отображения это означает, что один из мультипликаторов должен быть равен 1. Так как в невырожденном случае  $\text{Fix}(R)$  и  $\text{Fix}(T \circ R)$  не касаются друг друга в точке  $O$ , мы можем считать, что собственный вектор  $\mathbf{e}$ , отвечающий единичному мультипликатору, не лежит в  $\text{Fix}(R)$ . Отсюда следует, что  $R\mathbf{e} = -\mathbf{e}$  (так как, по обратимости,  $AR\mathbf{e} = R\mathbf{e}$ , то вектор  $\mathbf{f} = R\mathbf{e} + \mathbf{e}$  удовлетворяет  $AR\mathbf{f} = \mathbf{f}$  и  $R\mathbf{f} = \mathbf{f}$ , т. е. он принадлежит пересечению  $\text{Fix}(R)$  и касательной к  $\text{Fix}(T \circ R)$  и, следовательно, равен нулю).

Другие два мультипликатора образуют пару  $\lambda$  и  $\lambda^{-1}$ . Если  $\lambda$  вещественно и отлично от  $\pm 1$ , то центральное многообразие одномерно, поэтому мы имеем случай седло-седла [18, 26]. При отсутствии дополнительных вырождений мы имеем здесь практически такой же сценарий, как и в случае нереверсивных (то есть общего вида) диффеоморфизмов: на центральном многообразии отображение сопряжено сдвигу на единицу времени по траекториям потока

$$\dot{x} = \mu + x^2 + \dots,$$

обратимого относительно инволюции  $x \rightarrow -x$ ; при  $\mu > 0$  получаем две симметричные



неподвижные точки относительно  $R$ , эти точки сливаются в одну при  $\mu = 0$  и исчезают при  $\mu < 0$ .

Второй случай  $\lambda = e^{\pm i\omega}$  более интересен. Если  $\omega/\pi$  иррационально (или рационально,  $\omega/2\pi = m/n$ , но  $n$  достаточно велико), то диффеоморфизм вблизи неподвижной точки можно аппроксимировать потоковой нормальной формой с точностью до членов достаточно высокого порядка (до членов порядка  $n-1$ ). Линейная часть потоковой нормальной формы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = \omega z, \\ \dot{z} = -\omega y, \end{cases}$$

а инволюция  $R$  в этих координатах действует как

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z.$$

Нелинейные члены должны быть нерезонансными и удовлетворять условию обратимости. Поэтому получаем нормальную форму (4.4). Как мы объясняли, трехмерные фазовые портреты для нормальной формы получаются из изображенных на рисунке 2 вращением относительно оси  $x$ . Состояниям равновесия системы (4.4) отвечают неподвижные точки исходного отображения; в частности, паре из асимптотически устойчивого и асимптотически неустойчивого асимметричных равновесий отвечает пара аттрактор–репеллер и в исходном отображении. Симметричные двумерные инвариантные торы нормальной формы (4.4) (замкнутые кривые на рис. 2) отвечают симметричным двумерным КАМ-торам исходного отображения (при диофантовых наборах чисел вращения; резонансные зоны, по аналогии со случаем двумерных отображений, должны отвечать хаотической динамике, причем смешанного типа, то есть сосуществованию консервативных и неконсервативных динамических режимов). Симметричная седловая периодическая траектория системы (4.4) (на рис. 2 это седловое состояние равновесия на линии  $(x = 0, r \neq 0)$ ) соответствует замкнутой нормально-гиперболической симметричной инвариантной кривой исходного отображения (нормально-гиперболические многообразия сохраняются при малых возмущениях [11], поэтому она сохраняется при переходе от потоковой нормальной формы к исходному отображению). Симметричная эллиптическая периодическая траектория системы (4.4) (на рис. 2 это состояние равновесия типа центр на линии  $(x = 0, r \neq 0)$ ) отвечает симметричной замкнутой инвариантной кривой исходного отображения, для дискретной последовательности значений параметра  $\mu$ , отвечающих диофантовым числам вращения, а при других значениях параметра она, вообще говоря, должна разваливаться на резонансы (мы здесь не исследуем детальную картину того, как это происходит в данном случае).

Перейдем к случаю  $\dim(\text{Fix}(R)) = \dim(\text{Fix}(T \circ R)) = 2$ . В типичном случае поверхность  $\text{Fix}(T \circ R)$  пересекает плоскость  $\text{Fix}(R)$  в окрестности симметричной неподвижной точки  $O$  трансверсально по гладкой кривой  $\ell$ , проходящей через  $O$ . По конструкции линия  $\ell$  заполнена симметричными неподвижными точками отображения  $T$ , то есть  $T = id$  на  $\ell$ . В этом случае касательный вектор к  $\ell$  является собственным вектором матрицы линеаризации  $A$  отображения  $T$  в точке  $O$ , и этому вектору отвечает единичный мультипликатор. Оставшиеся два мультипликатора образуют пару  $\lambda, \lambda^{-1}$ . В общем случае  $\lambda \neq \pm 1$ , и пара  $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$  лежит либо на единичной окружности, либо на вещественной прямой. В первом случае точку называют квазиэллиптической, а во втором — квазигиперболической. Очевидно, что если точка  $O$  квазиэллиптическая, то и все близкие неподвижные точки на кривой  $\ell$  такие

же; то же и в случае квазигиперболической точки. Кривая квазигиперболических точек является нормально-гиперболическим инвариантным многообразием и служит пересечением инвариантных двумерных устойчивого и неустойчивого многообразий. Вблизи линии квазиэллиптических точек поведение в невырожденном случае описывается КАМ-теорией [25]: здесь множество почти полной меры заполнено инвариантными замкнутыми КАМ-кривыми, окружающими линию  $\ell$ . Как и в случае эллиптических точек двумерных обратимых отображений, в резонансных зонах вблизи линии квазиэллиптических точек следует ожидать хаотического поведения и нарушения консервативности (то есть смешанной динамики).

При движении по кривой неподвижных точек возможен переход от квазигиперболического к квазиэллиптическому типу (см. [7]). При этом у соответствующей неподвижной точки возникает двойной мультипликатор  $\lambda = -1$ , либо  $\lambda$  обращается в единицу, то есть получаем трехкратный единичный мультипликатор. Подчеркнем, что переход мультипликатора через  $\pm 1$  здесь происходит без изменения параметров системы; иными словами, мы имеем «бифуркацию коразмерности 0». В невырожденном случае кратным мультипликаторам отвечает полная жорданова клетка в матрице линеаризации отображения. Случай трехкратного  $\lambda = 1$  с полной жордановой клеткой рассмотрен в [24]. Там было, в частности, показано, что вблизи точки перехода квазигиперболические неподвижные точки имеют симметричные гомоклинические траектории. При этом поведение здесь аналогично поведению отображения Пуанкаре гамильтоновой системы вблизи параболической периодической траектории, то есть динамика здесь в основных чертах консервативна (тем не менее, в хаотическом слое вблизи трансверсальных гомоклинических траекторий опять следует ожидать смешанную динамику). Аналогичные результаты получаются и для случая двойного  $\lambda = -1$  с жордановой клеткой, а также для бифуркаций прохождения через резонанс ( $\lambda = e^{\pm 2\pi i \frac{p}{q}}$  в квазиэллиптической точке).

Таким образом, бифуркацию потери симметрии следует ожидать только при возникновении дополнительного вырождения, то есть в случаях коразмерности 1 как минимум. Один из таких случаев отвечает трехкратному единичному мультипликатору с неполной жордановой клеткой. Пусть обратимое отображение  $T$  имеет неподвижную точку в начале координат, и  $A$  — матрица линеаризации  $T$  в неподвижной точке. Двумерные поверхности  $Fix(R)$  и  $Fix(T \circ R)$  либо пересекаются трансверсально в неподвижной точке, либо касаются; в любом случае они имеют общий касательный вектор  $\mathbf{e}$ , который служит собственным вектором матрицы  $A$  и отвечает единичному мультипликатору:  $A\mathbf{e} = \mathbf{e}$ . Предположим (это дополнительное условие коразмерности 1), что имеется еще один собственный вектор  $\mathbf{f}$ , такой, что  $A\mathbf{f} = \mathbf{f}$ . Очевидно, что либо  $R\mathbf{f} = \mathbf{f}$  (тогда мы имеем нетрансверсальное пересечение  $Fix(R)$  и  $Fix(T \circ R)$ ), либо вектор  $\mathbf{f}$  трансверсален  $Fix(R)$ , и тогда его можно выбрать так, что  $R\mathbf{f} = -\mathbf{f}$ . Мы рассмотрим только последний случай, в силу следующих соображений. Так как  $\det(A) = 1$  в силу реверсивности и ориентируемости, то все три собственных числа матрицы  $A$  равны единице. Чтобы не увеличивать коразмерность, мы предполагаем  $A \neq id$ , то есть других собственных векторов у  $A$  нет. Как мы уже отмечали, отображение  $T$  вблизи неподвижной точки со всеми мультипликаторами, равными 1, аппроксимируется до членов сколь угодно высокого порядка сдвигом на единицу времени по траекториям потоковой нормальной формы. Матрица  $B$  линейной части векторного поля нормальной формы равна логарифму  $A$ , так что  $B\mathbf{e} = B\mathbf{f} = 0$ . Нормальная форма в этом случае может быть неконсервативной только при условии (4.7), поэтому мы и предполагаем  $R\mathbf{f} \neq \mathbf{f}$ . При этом условии потоковая нормальная форма приводится к виду (4.8). Отсюда мы, в частно-

сти, получаем, что при условии (4.10) данная бифуркация ведет (в исходном отображении) к рождению от кривой симметричных неподвижных точек пары из асимптотически устойчивой и асимптотически неустойчивой асимметричных неподвижных точек  $O_{\pm}$ . Областям в фазовом пространстве нормальной формы, заполненным траекториями, соединяющими репеллер  $O_{-}$  с аттрактором  $O_{+}$ , отвечают области такого же поведения в исходном отображении, а областям, заполненным симметричными периодическими траекториями, в исходном отображении отвечают области, где множество большой меры занимают симметричные КАМ-кривые.

По поводу других случаев коразмерности 1 заметим, что, как мы видели, мы не можем ожидать бифуркации потери симметрии в случае коразмерности 1, если  $Fix(R)$  и  $Fix(T \circ R)$  пересекаются нетрансверсально. Поэтому мы можем считать, что имеется кривая неподвижных точек, и, соответственно, бифуркации могут происходить либо при переходе мультипликатора  $\lambda$  через  $-1$ , либо при переходе через резонанс в квазиэллиптической точке. Можно показать, что при переходе  $\lambda$  через  $-1$  нормальная форма консервативна во всех случаях коразмерности 1, то есть бифуркации потери симметрии в этих случаях не происходит. Бифуркации коразмерности 1 резонансных квазиэллиптических точек, насколько нам известно, на сегодняшний день не рассматривались.

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2002. С. 296–326.
- [2] Bochner S., Montgomery D. Locally compact groups of differentiable transformations // Ann. of Math. (2), 1946, vol. 47, no. 4, pp. 639–653.
- [3] Bibikov Yu. N. Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations. (Lecture Notes in Math., vol. 702.) Berlin–Heidelberg: Springer, 1979. 147 pp.
- [4] Broer H. W. Quasiperiodic flow near a codimension one singularity of a divergence free vector field in dimension three // Dynamical systems and turbulence (Warwick, 1980). (Lecture Notes in Math., vol. 898.) Berlin–New York: Springer, 1981. P. 75–89.
- [5] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: Order amidst chaos. (Lecture Notes in Math., vol. 1645.) Berlin: Springer, 1996. 196 pp.
- [6] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T., Sten'kin O. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps. arXiv:1201.5357v1 [math.DS], 25 Jan 2012.
- [7] Devaney R. L. Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc., 1976, vol. 218, pp. 89–113.
- [8] Fiedler B., Liebscher S., Alexander J. C. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: 1. Theory // J. Differential Equations, 2000, vol. 167, no. 1, pp. 16–35.
- [9] Гаврилов Н. К. О некоторых бифуркациях состояния равновесия с одним нулевым и парой чисто мнимых корней // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1978. С. 33–40.
- [10] Гаврилов Н. К. О некоторых бифуркациях состояний коразмерности два бездивергентных векторных полей чисто мнимых корней // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1985. С. 46–54.
- [11] Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univ. Math. J., 1971, vol. 21, no. 3, pp. 193–226.

- [12] Glebsky L. Yu., Lerman L. M. On the small stationary self-localized solutions for generalized 1D Swift–Hohenberg equation // *Chaos*, 1995, vol. 5, no. 3, pp. 424–431.
- [13] Gonchenko S. V., Lamb J., Rios I., Turaev D. V. Attractors and repellers near generic reversible elliptic points: Preprint.
- [14] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. Новые результаты о хаотической динамике «кельтского камня» // *Нелинейная динамика* (в печати).
- [15] Holmes Ph., Guckenheimer J. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. 2nd ed. (Appl. Math. Sci., vol. 42.) New York: Springer, 1983. 480 pp. [Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2002. 560 с.]
- [16] Haragus M., Iooss G. Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems. Universitext. London: Springer; Les Ulis: EDP Sciences, 2011. 329 pp.
- [17] Iooss G., Pérouème M.-C. Perturbed homoclinic solutions in reversible 1 : 1 resonance vector fields // *J. Differential Equations*, 1993, vol. 102, no. 1, pp. 62–88.
- [18] Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. 3rd ed. (Appl. Math. Sci., vol. 112.) New York: Springer, 2004. 631 pp.
- [19] Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // *Phys. D*, 1998, vol. 112, nos. 1–2, pp. 1–39.
- [20] Lamb J. S. W., Capel H. W. Local bifurcations on the plane with reversing point group symmetry // *Chaos Solitons Fractals*, 1995, vol. 5, no. 2, pp. 271–293.
- [21] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*, 2004, vol. 17, no. 4, pp. 1217–1244.
- [22] Lerman L. Breaking hyperbolicity for smooth symplectic toral diffeomorphisms // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2010, vol. 16, nos. 2–3, pp. 196–211.
- [23] Lerman L. Isoenergetical structure of integrable Hamiltonian systems in extended neighborhoods of simple singular points: Three degrees of freedom // *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics: Supplement / L. Lerman, G. Polotovskiy, L. Shilnikov*. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 200.) Providence, RI: AMS, 2000. P. 219–242.
- [24] Pérouème M.-C. Bifurcation from a periodic orbit for a strongly resonant reversible autonomous vector field // *SIAM J. Math. Anal.*, 1993, vol. 24, no. 6, pp. 1577–1596.
- [25] Sevryuk M. V. Reversible systems. (Lecture Notes in Math., vol. 1211.) Berlin: Springer, 1986. 319 pp.
- [26] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: В 2-х тт. М.–Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2003; 2010. 442 с.; 548 с.
- [27] Шильников Л. П. Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем // *Докл. АН СССР*, 1969, т. 182, № 1, с. 53–56.
- [28] Shilnikov A., Nicolis G., Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-dimensional atmospheric circulation model // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1995, vol. 5, no. 6, pp. 1701–1711.
- [29] Takens F. Forced oscillations and bifurcations // *Applications of global analysis: 1* (Utrecht, 1973). (Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, vol. 3.) Utrecht: Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, 1974. P. 1–59. (См. также: *Global analysis of dynamical systems / H. W. Broer, B. Krauskopf, G. Vegter*. Bristol: IOP Publ., 2001. P. 2–61.)
- [30] Teixeira M. A. Singularities of reversible vector fields // *Phys. D*, 1997, vol. 100, nos. 1–2, pp. 101–118.
- [31] Тхай В. Н. Обратимые механические системы // *Нелинейная механика / В. М. Матросов, В. В. Румянцев, А. В. Карапетян*. М.: Физматлит, 2001. С. 131–146.
- [32] Vanderbauwhede A., Fiedler B. Homoclinic period blow-up in reversible and conservative system // *Z. Angew. Math. Phys.*, 1992, vol. 43, no. 2, pp. 291–318.

- [33] Wang L.-J. Homoclinic and heteroclinic orbits for the  $0^2$  or  $0^2i\omega$  singularity in the presence of two reversibility symmetries // Quart. Appl. Math., 2009, vol. 67, no. 1, pp. 1–38.

### On symmetry breaking bifurcations in reversible systems

Lev M. Lerman<sup>1</sup>, Dmitry V. Turaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>N. I. Lobachevski State University of Nizhni Novgorod

Faculty of Mechanics and Mathematics

pr. Gagarina 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Imperial College, London SW7 2AZ

<sup>1</sup>lermanl@mm.unn.ru, <sup>2</sup>d.turaev@imperial.ac.uk

We review results on local bifurcations in reversible systems (flows and diffeomorphisms) which lead to the creation of pairs attractor-repellor at bifurcations from symmetric equilibria (for flows) and fixed points (for diffeomorphisms). We consider bifurcations of co-dimension 1 in systems of small dimensions (2,3, and 4)

MSC 2010: 34C23, 34C14, 37G05, 37G40

Keywords: reversible system, reversible diffeomorphism, bifurcation, symmetric equilibrium, symmetric fixed point, loss of symmetry

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 323–343 (Russian)