Математические заметки

том 81 выпуск 1 январь 2007

УДК 512.74

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОМ ПРЕПЯТСТВИИ К СУЩЕСТВОВАНИЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК

А. Н. Скоробогатов

В этой работе дифференциалы спектральной последовательности, сходящейся к группе Брауэра–Гротендика алгебраического многообразия X над произвольным полем, интерпретируются как $\cup$-произведение с классом так называемого “элементарного препятствия”. В свою очередь, этот класс тесно связан с классом когомологий многообразия Альбанезе X степени 1. В случае, когда X – однородное пространство алгебраической группы, элементарное препятствие явно описывается в терминах естественных когомологических инвариантов X. Это сводит задачу вычисления группы Брауэра–Гротендика к вычислению некоторого спаривания в когомологиях Галуа.

Библиография: 20 названий.

Введение. Пусть X – гладкое алгебраическое многообразие над произвольным полем k характеристики 0. Когомологическая группа Брауэра–Гротендика $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)$ важна в силу своей бирациональной инвариантности; если же k – числовое поле, то с элементами $\operatorname{Br} X$ связаны условия, которым удовлетворяют образы k-точек X в пространстве адельных точек X (препятствие Манина–Брауэра). Для вычисления $\operatorname{Br} X$ используется спектральная последовательность Хохшильда–Серра

$$H^p(k, H^q_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m), \tag{0.1}$$

где через $\overline{X}$ обозначается многообразие над алгебраическим замыканием $\bar{k}$, полученное из X подъемом основного поля, а через $H^i(k,\,\cdot\,)$ – когомологии Галуа поля k. Предположим, что на $\overline{X}$ нет обратимых, всюду регулярных функций, отличных от констант. Чтобы вычислить факторгруппу группы Брауэра $\operatorname{Br} X$ по модулю группы Брауэра основного поля $\operatorname{Br} k$ при помощи этой спектральной последовательности, нужно знать группу Пикара $\operatorname{Pic}\overline{X}$, группу Брауэра $\operatorname{Br}\overline{X}$ вместе с действием на них группы Галуа $\Gamma = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$, а также дифференциалы

$$d_2^{1,1}\colon H^1(k,\operatorname{Pic}\overline{X}) \to H^3(k,\bar{k}^*), \qquad d_2^{0,2}\colon (\operatorname{Br}\overline{X})^\Gamma \to H^2(k,\operatorname{Pic}\overline{X}),$$
$$d_3^{0,2}\colon \operatorname{Ker}(d_2^{0,2}) \to H^3(k,\bar{k}^*).$$

Вычисление упрощается в следующих случаях:

- $\operatorname{Br}(\overline{X}) = 0$ (это эквивалентно тому, что все циклы в $H^2(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(1))$ алгебраические, а группа $H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(1))$ не имеет кручения ни при каких ℓ; см. [1; п. III.8]);

- на X имеется 0-цикл степени 1, определенный над k, например, k-точка (в этом случае $d_2^{1,1} = 0$, – см. далее п. 1);
- $H^3(k, \bar{k}^*) = 0$ (это так, если k – числовое или локальное поле).

В литературе часто встречаются формулы для $\operatorname{Br} X$, опирающиеся на эти упрощающие предположения. Наша цель в этой работе – дать некоторый ответ на вопрос о том, что можно сказать о группе Брауэра без этих дополнительных предположений.

Мы докажем в общем случае (см. предложение 1.1), что с точностью до знака дифференциалы $d_2^{i,1}$ совпадают с $\cup$-произведением с классом $e(X)$, который отличается только знаком от класса естественного 2-расширения модулей Галуа

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(X)^* \to \operatorname{Div} \overline{X} \to \operatorname{Pic} \overline{X} \to 0.$$

Это расширение рассматривалось Ж.-Л. Кольо-Теленом и Ж.-Ж. Сансюком [2] в связи с тем, что условие $e(X) = 0$, эквивалентное существованию Галуа-эквивариантного сечения гомоморфизма $\bar{k}^* \to \bar{k}(X)^*$, является необходимым условием для существования на X рациональных точек (а также 0-циклов степени 1, определенных над k). Класс $e(X)$ называется “*элементарным препятствием*” к существованию рациональных точек на X. В случае, когда $\operatorname{Pic} \overline{X}$ не имеет кручения, обращение в нуль $e(X)$ есть необходимое и достаточное условие для существования универсальных торсоров на X, а в общем случае из него следует существование торсоров любого данного типа (см. [2] или [3; гл. 2]). Из предложения 1.1 вытекает формула для “алгебраической” части $\operatorname{Br} X$ в терминах когомологий Галуа (следствие 1.2).

Предположим дополнительно, что X – проективное многообразие. Пусть J – многообразие Пикара X; группа $\bar{k}$-точек J отождествляется с компонентой $\operatorname{Pic}^0 \overline{X}$ группы Пикара $\overline{X}$, параметризующей классы дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Пусть A – многообразие Альбанезе X; оно двойственно J как абелево многообразие. Выбор $\bar{k}$-точки на X задает отображение Альбанезе $\overline{X} \to \overline{A}$, переводящее эту точку в нуль. Это отображение спускается до отображения $X \to D$, где D – некоторое главное однородное пространство со структурной группой A, определенное над k. Обозначим его класс $\delta(X) \in H^1(k, A)$. Классы $e(X)$ и $\delta(X)$ тесно связаны между собой (см. предложение 2.1).

Пусть теперь X – кривая; тогда $J = A$ и $J(\bar{k}) = \operatorname{Pic}^0 \overline{X}$ параметризует классы дивизоров степени 0, а $D(\bar{k}) = \operatorname{Pic}^1 \overline{X}$ – классы дивизоров степени 1 на X. Из предложения 2.1 получается формула для группы Брауэра кривой X: изоморфизм Барзотти–Вейля задает естественное спаривание

$$H^1(k, J) \times H^1(k, J) \to H^3(k, \bar{k}^*),$$

причем $(\delta(X), \delta(X)) = 0$; наш результат (теорема 2.2) состоит в том, что фактор-группа $\operatorname{Br} X$ по образу группы Брауэра поля $\operatorname{Br} k$ канонически изоморфна фактор-группе ортогонального дополнения $\delta(X)^{\perp} \subset H^1(k, J)$ по циклической подгруппе, порожденной $\delta(X)$.

Сходные формулы получаются и в случае, когда X – главное однородное пространство полупростой алгебраической группы или однородное пространство односвязной полупростой группы со связными стабилизаторами (см. предложения 3.1 и 3.2).

Результаты настоящей работы используются в статье М. В. Борового, Ж.-Л. Кольо-Телена и автора [4], где доказана эквивалентность зануления элементарного препятствия $e(X)$ и инъективности естественного отображения $\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} X$, когда k –

локальное поле. Если X – однородное пространство связной алгебраической группы со связными стабилизаторами над локальным полем, то из зануления $e(X)$ следует наличие на X рациональных точек. В [4] получены также аналоги этих результатов для случая числовых и ряда других полей. Например, если k – числовое поле, а на X имеются точки всюду локально, то из зануления $e(X)$ следует тривиальность части препятствия Манина к принципу Хассе, а именно той его части, которая связана с подгруппой локально постоянных классов. Обратное утверждение верно, если $\operatorname{Pic}\overline{X}$ – конечно порожденная абелева группа без кручения [2], но в общем случае вопрос об эквивалентности этих двух утверждений, по-видимому, открыт[1].

1. Предложение из гомологической алгебры. Пусть $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{X}$ – абелевы категории с достаточным количеством инъективных объектов, и $f\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{X}$ – точный слева аддитивный функтор, у которого есть левый присоединенный функтор f^*. Пусть $\mathscr{E}\in\operatorname{Ob}(\mathscr{Y})$, $\mathscr{M}\in\operatorname{Ob}(\mathscr{X})$. Спектральная последовательность

$$\mathrm{E}_2=\operatorname{Ext}^p_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^qf_*\mathscr{E})\Rightarrow\operatorname{Ext}^{p+q}_{\mathscr{Y}}(f^*\mathscr{M},\mathscr{E}) \tag{1.1}$$

является частным случаем спектральной последовательности композиции функторов. Наша цель состоит в описании дифференциалов

$$d_2^{i,j}\colon \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^jf_*\mathscr{E})\to\operatorname{Ext}^{i+2}_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^{j-1}f_*\mathscr{E})$$

в терминах $\cup$-произведения. Рассмотрим вспомогательную спектральную последовательность

$$\operatorname{Ext}^p_{\mathscr{X}}(R^jf_*\mathscr{E},R^qf_*\mathscr{E})\Rightarrow\operatorname{Ext}^{p+q}_{\mathscr{Y}}(f^*(R^jf_*\mathscr{E}),\mathscr{E}), \tag{1.2}$$

являющуюся частным случаем (1.1) при $\mathscr{M}=R^jf_*\mathscr{E}$, и ее дифференциал

$$\partial=\partial_2^{0,j}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{X}}(R^jf_*\mathscr{E},R^jf_*\mathscr{E})\to\operatorname{Ext}^2_{\mathscr{X}}(R^jf_*\mathscr{E},R^{j-1}f_*\mathscr{E}).$$

Образ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_j\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{X}}(R^jf_*\mathscr{E},R^jf_*\mathscr{E})$ дает выделенный элемент $\partial(\mathrm{Id}_j)\in\operatorname{Ext}^2_{\mathscr{X}}(R^jf_*\mathscr{E},R^{j-1}f_*\mathscr{E})$. Следующее предложение, возможно, хорошо известно специалистам, но мы приведем его с полным доказательством, так как нам не удалось отыскать его в существующей литературе.

Предложение 1.1. *Для любых $i\geqslant 0$, $j\geqslant 1$ и любого $\alpha\in\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^jf_*\mathscr{E})$*

$$d_2^{i,j}(\alpha)=(-1)^i\alpha\cup\partial(\mathrm{Id}_j),$$

где $\cup$ есть спаривание Йонеды:

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^jf_*\mathscr{E})\times\operatorname{Ext}^2_{\mathscr{X}}(R^jf_*\mathscr{E},R^{j-1}f_*\mathscr{E})\to\operatorname{Ext}^{i+2}_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^{j-1}f_*\mathscr{E}).$$

Замечание. Для $i=0$, $j=1$ наше утверждение есть лемма 1.A.4 работы [2].

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $i=1$. Пусть

$$0\to R^jf_*\mathscr{E}\to\mathscr{N}\to\mathscr{M}\to 0 \tag{1.3}$$

– расширение, класс которого в $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{X}}(\mathscr{M},R^jf_*\mathscr{E})$ есть α. Обозначим через d связывающий гомоморфизм длинной точной последовательности Ext'ов от первого аргумента, задаваемой последовательностью (1.3). По определению спаривания Йонеды

[1] Положительный ответ на этот вопрос недавно получен О. Виттенбергом (O. Wittenberg).

для $\xi \in \mathrm{Ext}^2_X(R^j f_*\mathscr{E}, R^{j-1} f_*\mathscr{E})$ имеем $\alpha \cup \xi = d(\xi)$. Докажем, что следующая диаграмма антикоммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(R^j f_*\mathscr{E}, R^j f_*\mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{X}}(R^j f_*\mathscr{E}, R^{j-1} f_*\mathscr{E}) \\ {\scriptstyle d}\big\downarrow & & {\scriptstyle d}\big\downarrow \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}, R^j f_*\mathscr{E}) & \xrightarrow{d_2^{1,j}} & \mathrm{Ext}^3_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}, R^{j-1} f_*\mathscr{E}) \end{array} . \qquad (1.4)$$

Отсюда следует утверждение предложения для $i = 1$. Для доказательства рассмотрим произвольную точную последовательность в $\mathscr{X}$:

$$0 \to A \to B \to C \to 0. \qquad (1.5)$$

Пусть $\mathscr{D}^+(\mathscr{X})$ – производная категория ограниченных снизу комплексов и

$$\cdots \to C^\bullet[-1] \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to \cdots$$

– выделенный треугольник в $\mathscr{D}^+(\mathscr{X})$, задаваемый (1.5). Для любого $F \in \mathscr{D}^+(\mathscr{X})$, $i \in \mathbb{Z}$, функторы обрезания задают выделенные треугольники

$$\cdots \to \tau_{\leqslant j-1}(F) \to F \to \tau_{\geqslant j}(F) \to \cdots .$$

Мы получаем следующую естественную диаграмму в производной категории абелевых групп:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(A^\bullet, \tau_{\geqslant j}(F)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(A^\bullet, \tau_{\leqslant j-1}(F))[1] \\ {\scriptstyle d}\big\downarrow & & {\scriptstyle d}\big\downarrow \\ \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(C^\bullet, \tau_{\geqslant j}(F))[1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(C^\bullet, \tau_{\leqslant j-1}(F))[2] \end{array} .$$

Эта диаграмма антикоммутативна [5; предложение 1.1.11]. В частном случае, когда $F = \tau_{[j-1,j]}(Rf_*\mathscr{E})$, а в качестве точной последовательности (1.5) берется (1.3), получается антикоммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}((R^j f_*\mathscr{E})^\bullet, \tau_{[j]}(Rf_*\mathscr{E})) & \longrightarrow & \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}((R^j f_*\mathscr{E})^\bullet, \tau_{[j-1]}(Rf_*\mathscr{E}))[1] \\ {\scriptstyle d}\big\downarrow & & {\scriptstyle d}\big\downarrow \\ \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}^\bullet, \tau_{[j]}(Rf_*\mathscr{E}))[1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}^\bullet, \tau_{[j-1]}(Rf_*\mathscr{E}))[2] \end{array} .$$

Искомая антикоммутативная диаграмма (1.4) получается отсюда переходом к группам когомологий степени j. Действительно, отождествление объектов и вертикальных стрелок не вызывает затруднений, а тот факт, что дифференциалы в спектральной последовательности композиции функторов получаются из связывающих гомоморфизмов обрезанных комплексов, легко выводится из явной конструкции этой спектральной последовательности при помощи инъективной резольвенты Картана–Эйленберга (см., например, [6; приложение B]).

Для доказательства предложения при $i > 1$ достаточно разложить i-кратное расширение α в произведение однократных расширений и применить только что доказанное утверждение i раз.

Осталось разобрать случай $i = 0$. Тогда $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}, R^j f_*\mathscr{E})$. Из функториальности спектральной последовательности (1.2) по первому аргументу вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(R^j f_*\mathscr{E}, R^j f_*\mathscr{E}) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{X}}(R^j f_*\mathscr{E}, R^{j-1} f_*\mathscr{E}) \\ {\scriptstyle\alpha^*}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha^*}\downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}, R^j f_*\mathscr{E}) & \xrightarrow{d_2^{0,j}} & \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{X}}(\mathscr{M}, R^{j-1} f_*\mathscr{E})\end{array}.$$

На этом доказательство предложения заканчивается.

Пусть k – поле характеристики 0 с алгебраическим замыканием $\bar{k}$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Пусть X – гладкое геометрически неприводимое и приведенное многообразие, $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. Мы будем предполагать, что на $\overline{X}$ нет обратимых регулярных функций, отличных от констант, т.е. $H^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m) = \bar{k}^*$. Рассмотрим спектральную последовательность

$$\mathrm{Ext}^p_k(\mathscr{M}, H^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_X(p^*\mathscr{M}, \mathbb{G}_m), \tag{1.6}$$

получающуюся из (1.1) в частном случае, когда $\mathscr{Y}$ – категория этальных пучков на X, $\mathscr{X}$ – категория дискретных Γ-модулей (совпадающая с категорией этальных пучков на $\mathrm{Spec}(k)$), $f\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ индуцирован структурным морфизмом $p\colon X \to \mathrm{Spec}(k)$, $\mathscr{E} = \mathbb{G}_m$. Возьмем $\mathscr{M} = \mathrm{Pic}\,\overline{X}$. Сопоставим X канонический элемент

$$e(X) := \partial(\mathrm{Id}) \in \mathrm{Ext}^2_k(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \bar{k}^*),$$

где $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ – тождественное отображение, как это было сделано выше. Класс $e(X)$ является важной характеристикой многообразия X; напомним его основные свойства (см. [3; теорема 2.3.4]):

(1) класс $-e(X)$ совпадает с классом естественного 2-расширения Γ-модулей

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(X)^* \to \mathrm{Div}\,\overline{X} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X} \to 0; \tag{1.7}$$

(2) $e(X) = 0$ тогда и только тогда, когда естественный гомоморфизм $\bar{k}^* \to \bar{k}(X)^*$ имеет Γ-эквивариантное сечение;

(3) если на X есть 0-цикл степени 1, например, k-точка, то $\bar{k}^* \to \bar{k}(X)^*$ имеет Галуа-эквивариантное сечение, откуда $e(X) = 0$.

Замечание. Класс $e(X)$ функториален в следующем смысле: если $f\colon Y \to X$ – морфизм многообразий, не имеющих непостоянных обратимых регулярных функций над $\bar{k}$, то $e(X)$ получается из $e(Y)$ при помощи гомоморфизма $f^*\colon \mathrm{Pic}\,\overline{X} \to \mathrm{Pic}\,\overline{Y}$. Действительно, из функториальности спектральной последовательности (1.6) по $\mathscr{M}$ и по X вытекает коммутативность нижеприведенной диаграммы, откуда и следует это утверждение:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Pic}\,\overline{Y}, \mathrm{Pic}\,\overline{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_k(\mathrm{Pic}\,\overline{Y}, \bar{k}^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \mathrm{Pic}\,\overline{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_k(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \bar{k}^*) \\ \uparrow & & \| \\ \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_k(\mathrm{Pic}\,\overline{X}, \bar{k}^*)\end{array}.$$

Напомним, что через $\operatorname{Br}_1 X$ обозначается так называемая “алгебраическая” часть группы Брауэра, т.е. ядро естественного гомоморфизма $\operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} \overline{X}$, а через $\operatorname{Br}_0 X$ – образ $\operatorname{Br} k$ в $\operatorname{Br} X$. Поскольку $\operatorname{Br} \bar{k} = 0$, то $\operatorname{Br}_0 X$ лежит в $\operatorname{Br}_1 X$.

Следствие 1.2. *Факторгруппа* $\operatorname{Br}_1 X/\operatorname{Br}_0 X$ *канонически изоморфна подгруппе* $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$, *состоящей из элементов* ξ *таких, что* $\xi \cup e(X) = 0$.

Доказательство. Если в (1.6) положить $\mathscr{M} = \mathbb{Z}$, то получим спектральную последовательность (0.1). Остается применить предложение 1.1 в случае $i = j = 1$.

Если $e(X) = 0$, то из (0.1) и предложения 1.1 следует точность последовательности

$$0 \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br}_1 X \to H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \to 0. \tag{1.8}$$

2. Группа Брауэра и изоморфизм Барзотти–Вейля. Пусть k-gps – категория коммутативных алгебраических групп над полем k. Эта категория абелева, и для $A, B \in \operatorname{Ob}(k\text{-gps})$ можно определить $\operatorname{Ext}^i_{k\text{-gps}}(A, B)$ как группу классов эквивалентности i-кратных расширений A при помощи B (см. краткий обзор в [7; п. I.0], [8]). Если k – совершенное поле, имеется спектральная последовательность [9]

$$H^p(k, \operatorname{Ext}^q_{\bar{k}\text{-gps}}(A, B)) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_{k\text{-gps}}(A, B). \tag{2.1}$$

Пусть Φ – точный функтор из k-gps в категорию дискретных Γ-модулей, сопоставляющий группе A модуль Галуа $A(\bar{k})$, т.е. “забывающий” структуру алгебраической группы на $A(\bar{k})$.

Формула Барзотти–Вейля утверждает наличие канонического изоморфизма модулей Галуа

$$\operatorname{Ext}^1_{\bar{k}\text{-gps}}(A, \mathbb{G}_m) = A^t(\bar{k}),$$

где A – абелево многообразие, а A^t – двойственное к нему абелево многообразие [10; п. VII.3]. Кроме того, $\operatorname{Ext}^i_{\bar{k}\text{-gps}}(A, \mathbb{G}_m) = 0$ для $i \neq 1$ [8; предложение 12.3]. С учетом этих фактов из спектральной последовательности (2.1) вытекает наличие естественного изоморфизма

$$H^1(k, A^t) = \operatorname{Ext}^2_{k\text{-gps}}(A, \mathbb{G}_m). \tag{2.2}$$

Напомним конструкцию изоморфизма Барзотти–Вейля. Пусть $\mathscr{P}$ – линейное расслоение Пуанкаре на $A^t \times A$. Сопоставим $a \in A^t(\bar{k})$ главное однородное пространство W_a над A со структурной группой $\mathbb{G}_m$, получающееся из ограничения $\mathscr{P}$ на $a \times A$ удалением нулевого сечения. W_a канонически наделяется структурой коммутативной групповой схемы, так что мы имеем расширение в k-gps (см. [7; приложение C]): $1 \to \mathbb{G}_m \to W_a \to A \to 1$.

Вернемся к ситуации, рассматривавшейся в конце предыдущего раздела. Пусть J – многообразие Пикара гладкого полного геометрически неприводимого и приведенного многообразия X, $A = J^t$ – многообразие Альбанезе X. Группа $\bar{k}$-точек J отождествляется с подгруппой $\operatorname{Pic}^0 \overline{X} \subset \operatorname{Pic} \overline{X}$, состоящей из дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Обозначим через i естественное вложение $J(\bar{k})$ в $\operatorname{Pic} \overline{X}$.

Если на X имеется рациональная точка, то определено отображение Альбанезе $X \to A$, переводящее ее в нуль. В общем случае А. Вейль [11] построил определенные над k главное однородное пространство D со структурной группой A и морфизм

$\mathrm{Alb}\colon X \to D$ такие, что при подъеме основного поля до $\bar{k}$ этот морфизм становится классическим отображением Альбанезе. Обозначим $\delta(X) \in H^1(k,A)$ класс $[D]$. Следующее предложение показывает, как связаны между собой классы $\delta(X)$ и $e(X)$.

Предложение 2.1. *Пусть X – гладкое полное геометрически неприводимое и приведенное многообразие над полем k характеристики* 0, *J – многообразие Пикара X, а $A = J^t$ – многообразие Альбанезе X. Тогда $-i^*(e(X)) \in \mathrm{Ext}^2_k(J(\bar{k}),\bar{k}^*)$ получается из $\delta(X) \in H^1(k,A) = \mathrm{Ext}^2_{k\text{-gps}}(J,\mathbb{G}_m)$ применением забывающего функтора Φ.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{Div}^0\,\overline{X}$ группу дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Элемент $-i^*(e(X))$ является классом расширения

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(X)^* \to \mathrm{Div}^0\,\overline{X} \to J(\bar{k}) \to 0, \tag{2.3}$$

получающегося из (1.7) посредством гомоморфизма $i\colon J(\bar{k}) \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}$. Соответствующее 2-расширение для D имеет вид

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(D)^* \to \mathrm{Div}^0\,\overline{D} \to J(\bar{k}) \to 0,$$

так как Γ-модуль $\mathrm{Pic}^0\,\overline{D}$ канонически изоморфен $\mathrm{Pic}^0\,\overline{X}$.

Выберем раз и навсегда точку $P \in D(\bar{k})$, лежащую в образе морфизма Alb, и пусть $\phi\colon \Gamma \to A(\bar{k})$ – 1-коцикл такой, что для любого $g \in \Gamma$ точка $g(P)$ получается сдвигом P на $\phi(g)$. По определению, $\delta(X) \in H^1(k,A)$ является классом ϕ. Отождествим $\overline{D}$ с $\overline{A}$, выбрав P в качестве нуля группового закона. Обозначим $\mathfrak{P}$ орбиту P при действии группы Галуа. Пусть $\mathscr{O}_{\mathfrak{P}}$ – локальное кольцо D в $\mathfrak{P}$. Обозначим $\mathrm{Div}^0(\overline{D})_{\mathfrak{P}}$ группу дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю, носители которых не пересекаются с $\mathfrak{P}$. Имеется естественное 2-расширение Γ-модулей

$$1 \to \bar{k}^* \to (\mathscr{O}_{\mathfrak{P}} \otimes_k \bar{k})^* \to \mathrm{Div}^0(\overline{D})_{\mathfrak{P}} \to J(\bar{k}) \to 0. \tag{2.4}$$

Морфизм Alb задает естественное Γ-эквивариантное отображение расширений (2.4) на (2.3), поэтому они представляют один и тот же класс в $\mathrm{Ext}^1_k(J(\bar{k}),\bar{k}^*)$.

Пусть $k(P)$ – поле вычетов точки P. Перейдя к факторгруппе $(\mathscr{O}_{\mathfrak{P}} \otimes_k \bar{k})^*$ по подгруппе рациональных функций на D, регулярных и принимающих значение 1 в каждой из точек $\mathfrak{P}$, получим эквивалентное (2.4) расширение

$$1 \to \bar{k}^* \to (k(P) \otimes_k \bar{k})^* \to C_{\mathfrak{P}} \to J(\bar{k}) \to 0,$$

служащее определением $C_{\mathfrak{P}}$. Мы утверждаем, что оно происходит из некоторого 2-расширения коммутативных алгебраических групп над k:

$$1 \to \mathbb{G}_m \to R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m) \to {?} \to J \to 0,$$

где $R_{k(P)/k}$ обозначает спуск основного поля по Вейлю. Для этого достаточно показать, что расширение

$$1 \to (k(P) \otimes_k \bar{k})^*/\bar{k}^* \to C_{\mathfrak{P}} \to J(\bar{k}) \to 0 \tag{2.5}$$

получается из расширения J при помощи k-тора $T = R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ в категории k-gps. Этот факт достаточно проверить над $\bar{k}$, откуда наше утверждение вытекает применением спуска Галуа. Согласно [10; гл. VII, п. 1.4] достаточно убедиться в том, что (2.5) задается *рациональной* симметрической системой факторов, т.е. 2-коциклом $J(\bar{k})$ с коэффициентами в $(\bar{k}^*)^{|\mathfrak{P}|}/\bar{k}^*$, задаваемым рациональными функциями на J. Над $\bar{k}$ мы можем работать непосредственно с A вместо D.

Пусть $\mathscr{D}$ – дивизор Пуанкаре на $A \times J$. По теореме о квадрате и "принципу качелей" на $A \times J \times J$ существует рациональная функция f, дивизор которой равен

$$(f) = s_{23}^{-1}(\mathscr{D}) - p_{12}^{-1}(\mathscr{D}) - p_{13}^{-1}(\mathscr{D}),$$

где s_{23} задается суммированием второй и третьей координат, а p_{12} и p_{13} – проекции $A \times J \times J \to A \times J$. Рациональное сечение s гомоморфизма $C_{\mathfrak{P}} \to J(\bar{k})$ в (2.5) можно задать сопоставив точке $x \in J(\bar{k})$ пересечение $\mathscr{D}$ с $A \times x$. Соответствующая система факторов задается формулой [10]:

$$\delta(s)(x, y) := s(x + y) - s(x) - s(y).$$

В нашем случае этот дивизор есть дивизор функции f, ограниченной на $A \times x \times y$, рассматриваемый с точностью до дивизоров функций, принимающих равные ненулевые значения во всех точках, сопряженных с P. Таким образом, $\delta(s)(x, y)$ есть значение f в этих точках с точностью до общего множителя из $\bar{k}^*$. Полученная система факторов рациональна, так как задается рациональной функцией. Итак доказано, что (2.5) происходит из расширения коммутативных алгебраических групп над k

$$1 \to \mathbb{G}_m \to R_{k(p)/k}(\mathbb{G}_m) \to J_{\mathfrak{P}} \to J \to 0 \tag{2.6}$$

для некоторой коммутативной алгебраической группы $J_{\mathfrak{P}}$.

Замечание 1. Если X – кривая, то $J_{\mathfrak{P}}$ – обобщенный якобиан X, задаваемый модулем $\mathfrak{P}$ (см. [10; п. I.1]).

Расширение (2.6) можно разложить в произведение Йонеды $\alpha \cup \beta$, где α – расширение торов

$$1 \to \mathbb{G}_m \to R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m) \to T \to 1,$$

а β – только что построенное расширение коммутативных алгебраических групп

$$1 \to T \to J_{\mathfrak{P}} \to J \to 0.$$

Над $\bar{k}$ тор $R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m)$ распадается в произведение экземпляров $\mathbb{G}_m$ по числу сопряженных точек $g(P)$, $g \in \Gamma$. Пусть $\pi_{g(P)}$ обозначает проекции на соответствующие компоненты; эти отображения задают сечения α в категории коммутативных $\bar{k}$-групп. Спектральная последовательность Милна (2.1) дает следующее каноническое отображение (являющееся на самом деле изоморфизмом):

$$H^1(k, \mathrm{Hom}_{\bar{k}\text{-gps}}(T, \mathbb{G}_m)) \to \mathrm{Ext}^1_{k\text{-gps}}(T, \mathbb{G}_m),$$

причем коцикл, задающий α, имеет вид

$$g \longmapsto \psi(g) = \pi_{g(P)}/\pi_P \in \mathrm{Hom}_{\bar{k}\text{-gps}}(T, \mathbb{G}_m).$$

Отсюда следует, что (2.6) получается аналогичным отображением

$$H^1(k, \mathrm{Ext}^1_{\bar{k}\text{-gps}}(J, \mathbb{G}_m)) \to \mathrm{Ext}^2_{k\text{-gps}}(J, \mathbb{G}_m)$$

из коцикла, сопоставляющего $g \in \Gamma$ расширение, индуцированное β при помощи гомоморфизма $\pi_{g(P)}/\pi_P$. Нетрудно найти систему факторов этого расширения $\overline{J}$ при помощи $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}$. Взяв s в качестве рационального сечения и повторяя приведенные выше вычисления, получаем, что она имеет вид $f(g(P),x,y)/f(P,x,y) \in \bar{k}(\overline{J} \times \overline{J})^*$. Однако согласно замечанию к теореме 6 [10; п. VII.3] тот же вид имеет и система факторов расширения, которое получается посредством изоморфизма Барзотти–Вейля из $\delta(X)(g) = g(P) - P \in A(\bar{k})$. Предложение доказано.

Замечание 2. Если X – кривая рода 0, то на X имеется Γ-инвариантный класс дивизоров степени 1, поэтому естественно считать, что $\delta(X) = 0$. Однако $e(X) \in \operatorname{Ext}^2_k(\mathbb{Z}, \bar{k}^*) = \operatorname{Br} X$ есть класс X как многообразия Севери–Брауэра. При этом $e(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X \simeq \mathbb{P}^1_k$. Аналогичные примеры существуют и для кривых рода больше 1. Пусть, например, X – кривая рода 2, являющаяся циклическим накрытием степени 3 коники C без k-точек, разветвленным в 4 точках. Тогда $e(X) \neq 0$. Действительно, в противном случае гомоморфизм $\bar{k}^* \to \bar{k}(X)^*$ имеет сечение, но тогда имеет сечение и соответствующий гомоморфизм для C, а это противоречит тому, что $e(C) \neq 0$. В то же время X обладает Γ-инвариантным классом дивизоров степени 1 (прообраз $\bar{k}$-точки C минус канонический класс X). Таким образом, в общем случае $\delta(X) = 0$ не влечет $e(X) = 0$. Однако, если X – кривая рода 1, то условие $\delta(X) = 0$ эквивалентно непустоте множества $X(k)$, и поэтому влечет $e(X) = 0$.

Замечание 3. Пусть X – произвольное гладкое проективное многообразие, а J – его многообразие Пикара. Если $e(X) = 0$, то на X существуют торсоры любого данного типа (см., например, [3; с. 31]). Пусть $Y \to X$ – торсор, типом которого является гомоморфизм $J[n](\bar{k}) \to \operatorname{Pic} \overline{X}$. Тогда $Y = X \times_D B$, где $B \to D$ – торсор типа $J[n](\bar{k}) \to \operatorname{Pic} \overline{J}$. Согласно [3; предложение 3.3.4 (b)] существование B эквивалентно делимости класса $[D] \in H^1(k, A)$ на n. Поэтому $\delta(X) = [D]$ – делимый элемент группы $H^1(k, A)$. Таким образом, если $H^1(k, A)$ не содержит делимых элементов, отличных от нуля, то $e(X) = 0$ влечет $\delta(X) = 0$. Этим свойством обладает поле вещественных чисел, но не обладает поле p-адических чисел. Однако и здесь (как и в более общем случае поля частных гензелева кольца дискретного нормирования с конечным полем вычетов) из зануления $e(X)$ следует зануление $\delta(X)$ (см. [12], а также [4]). Однако для некоторых других полей, например, для поля рядов Лорана $\mathbb{C}((t))$ это уже неверно: как показал недавно О. Виттенберг, $e(X) = 0$ для любого многообразия над полем когомологической размерности 1.

Замечание 4. Пусть, наконец, X – кривая над числовым полем, имеющая 0-цикл степени 1 над каждым пополнением поля k. Тогда $\delta(X) = 0$ влечет $e(X) = 0$. Действительно, выбор Γ-инвариантного элемента $\operatorname{Pic} \overline{X}$ степени 1 представляет $\operatorname{Pic} \overline{X}$ в виде прямой суммы $J(\bar{k}) \oplus \mathbb{Z}$. Отсюда

$$\operatorname{Ext}^2_k(\operatorname{Pic} \overline{X}, \bar{k}^*) \simeq \operatorname{Ext}^2_k(J(\bar{k}), \bar{k}^*) \oplus \operatorname{Br} k,$$

причем $e(X) \in \operatorname{Br} k$. Из наличия на X 0-циклов степени 1 всюду локально и из закона взаимности Хассе следует, что $e(X) = 0$.

В предположении гипотезы о конечности группы Тейта–Шафаревича абелева многообразия J обратная импликация верна для любого гладкого проективного многообразия X над числовым полем, имеющего точки всюду локально. В этом случае согласно теореме 2.12 работы [4] из $e(X)=0$ вытекает, что любая адельная точка на X, а значит и на D, ортогональна в смысле спаривания Брауэра–Манина подгруппе $\text{Б}(D)\subset \operatorname{Br} D$, состоящей из локально постоянных классов. По теореме Ю. И. Манина (см. [3; теорема 6.2.3]) отсюда следует, что $\delta(X)$ лежит в ядре спаривания Касселса–Тейта. Если $\text{Ш}(J)$ конечна, то это спаривание невырождено, поэтому $D\cong J$, т.е. $\delta(X)=0$.

Пусть A – абелево многообразие над совершенным полем k, и $J=A^t$ – двойственное абелево многообразие. Каноническое спаривание

$$(\ ,\ )\colon H^1(k,J)\times H^1(k,A)\to H^3(k,\bar{k}^*) \tag{2.7}$$

индуцируется композицией изоморфизма (2.2) и гомоморфизма, забывающего структуру алгебраической группы,

$$H^1(k,A)\to \operatorname{Ext}^2_{k\text{-gps}}(J,\mathbb{G}_m)\to \operatorname{Ext}^2_k(J(\bar{k}),\bar{k}^*),$$

из спаривания, задаваемого произведением Йонеды в когомологиях Галуа:

$$\cup\colon H^1(k,J)\times \operatorname{Ext}^2_k(J(\bar{k}),\bar{k}^*)\to H^3(k,\bar{k}^*).$$

Пусть J (соответственно, A) – многообразие Пикара (соответственно, многообразие Альбанезе) гладкого полного геометрически неприводимого и приведенного многообразия X над полем k. Из предложения 2.1 и функториальности последнего спаривания следует, что для любого $y\in H^1(k,J)$ имеем

$$(y,\delta(X))=-y\cup i^*(e(X))=-i_*(y)\cup e(X). \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. *Пусть X – гладкая полная геометрически неприводимая и приведенная кривая над полем k характеристики 0. Тогда $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br}_0 X$ канонически изоморфна факторгруппе ортогонального дополнения к $\delta(X)$ в $H^1(k,J)$ относительно спаривания (2.7) по модулю циклической подгруппы, порожденной $\delta(X)$.*

Доказательство. Напомним, что $\operatorname{Br}\overline{X}=0$ по теореме Тзена, поэтому $\operatorname{Br} X=\operatorname{Br}_1 X$. В случае кривой $J=A$. Хорошо известно и легко проверяется, что точная последовательность Γ-модулей

$$0\to J(\bar{k})\to \operatorname{Pic}\overline{X}\to \mathbb{Z}\to 0$$

представляет класс $\delta(X)\in H^1(k,J)=\operatorname{Ext}^1_k(\mathbb{Z},J(\bar{k}))$. Отсюда $i_*(\delta(X))=0$ и из формулы (2.8) следует $(\delta(X),\delta(X))=0$. Из той же точной последовательности получаем, что $H^1(k,\operatorname{Pic}\overline{X})$ есть факторгруппа $H^1(k,J)$ по подгруппе, порожденной $\delta(X)$. Утверждение теоремы теперь вытекает из следствия 1.2 и предложения 2.1.

3. Однородные пространства. Пусть G – полупростая группа над полем k характеристики 0. Многообразие G геометрически неприводимо и приведено, причем на $\overline{G}$ нет регулярных обратимых функций, отличных от констант (по лемме Розенлихта такие функции с точностью до умножения на константу являются характерами $\overline{G}$). Пусть $\widetilde{G}$ – универсальная накрывающая G. Как хорошо известно, $\widetilde{G}$ является центральным расширением G при помощи некоторой конечной абелевой группы μ, называемой фундаментальной группой G. Согласно [13] с таким расширением связано естественное отображение пунктированных множеств $d\colon H^1(k,G)\to H^2(k,\mu)$.

Предложение 3.1. *Пусть X – главное однородное пространство полупростой группы G, определенное над k, и $[X]$ – его класс в $H^1(k,G)$. Тогда $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br}_0 X$ есть множество элементов $H^1(k,\hat\mu)$, ортогональных $d([X])$ относительно спаривания*

$$H^1(k,\hat\mu)\times H^2(k,\mu)\to H^3(k,\bar k^*),$$

где $\hat\mu=\operatorname{Hom}(\mu,\bar k^*)$ – коммутативная k-группа, двойственная к μ.

Доказательство. Согласно [14] имеем $\operatorname{Br}\overline{G}=0$, поэтому $\operatorname{Br}X=\operatorname{Br}_1 X$. Модуль Галуа $\operatorname{Pic}\overline{X}$ канонически изоморфен $\hat\mu$ (см., например, [3; п. 3.2]). Поэтому класс $e(X)$ лежит в $\operatorname{Ext}^2_k(\hat\mu,\bar k^*)=H^2(k,\mu)$. Из результата Ж. Жиро [15; п. V.3.2.9] и предложения 2.3.11 [3] следует, что $e(X)=d([X])$ (подробнее см. [3; с. 54]). Теперь предложение вытекает из следствия 1.2.

Теперь предположим, что G – односвязная группа, т.е. $G=\widetilde{G}$, и пусть X – однородное пространство G, определенное над k, не обязательно главное, но такое, что стабилизатор $\overline{H}$ некоторой $\bar k$-точки X связен. Однородному пространству X канонически сопоставляется множество когомологий Галуа $H^2(k,\overline{H})$, содержащее выделенное подмножество нейтральных элементов (подробности см. в [16] или [17]). Т. Спрингер определил класс $\eta_X\in H^2(k,\overline{H})$, который нейтрален в том и только в том случае, когда X поднимается до главного однородного пространства G [16] (см. также [3; п. 9.2]). Известно, что X определяет канонический k-тор T такой, что $\overline{T}$ – максимальный торический фактор $\overline{H}$ (см. [17] или [18]). Обозначим через t естественное отображение множеств $H^2(k,\overline{H})\to H^2(k,T)$ (ср. [17; п. 1.7]). Пусть $\widehat{T}$ – модуль характеров тора T.

Предложение 3.2. *Пусть X – однородное пространство односвязной полупростой группы, определенное над k, причем на X имеется $\bar k$-точка, стабилизатор которой связен. Тогда $\operatorname{Br}_1 X/\operatorname{Br}_0 X$ есть множество элементов $H^1(k,\widehat{T})$, ортогональных $t(\eta_X)\in H^2(k,T)$ относительно спаривания*

$$H^1(k,\widehat{T})\times H^2(k,T)\to H^3(k,\bar k^*). \tag{3.1}$$

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 9.5.1 в [3] строится канонический изоморфизм Γ-модулей $\operatorname{Pic}\overline{X}=\widehat{T}$ (формула на с. 176; здесь используется односвязность G). Поэтому $e(X)$ лежит в $\operatorname{Ext}^2_k(\widehat{T},\bar k^*)=H^2(k,T)$. Там же доказывается, что $e(X)=t(\eta_X)$ [3; с. 177]. Остается воспользоваться следствием 1.2.

По-видимому, предположение об односвязности G можно отбросить ценой некоторого усложнения. В этом случае вместо $\widehat{T}$ следует рассматривать гиперкогомологии естественного комплекса Γ-модулей $\widehat{G}\to\widehat{T}$ (ср. [19]).

Напомним, что если M – дискретный Γ-модуль, то $\text{Ш}^i_\omega(k,M)\subset H^i(k,M)$ определяется как пересечение ядер гомоморфизмов ограничения на все проциклические замкнутые подгруппы Γ.

Следствие 3.3. *В условиях и обозначениях предложения 3.2 пусть X_c – гладкая полная компактификация X. Тогда $\operatorname{Br} X_c/\operatorname{Br}_0 X$ есть множество элементов подгруппы $\text{Ш}^1_\omega(k,\widehat{T})\subset H^1(k,\widehat{T})$, ортогональных $t(\eta_X)$ относительно спаривания (3.1).*

Доказательство. Как доказал Ф. А. Богомолов [20], $\operatorname{Br}\overline{X_c} = 0$, откуда $\operatorname{Br} X_c = \operatorname{Br}_1 X_c$. Вложение $X \hookrightarrow X_c$ задает естественное отображение соответствующих спектральных последовательностей (0.1). Гомоморфизм ограничения $r\colon \operatorname{Pic}\overline{X_c} \to \operatorname{Pic}\overline{X} = \widehat{T}$ сюръективен в силу гладкости X_c. Его ядро свободно порождается классами дивизоров $\overline{X_c}$, лежащими в дополнении к $\overline{X}$, так как на $\overline{X}$ нет непостоянных обратимых регулярных функций. Мы получаем короткую точную последовательность Γ-модулей

$$0 \to \operatorname{Div}_{\overline{X_c}\setminus\overline{X}}\overline{X_c} \to \operatorname{Pic}\overline{X_c} \to \widehat{T} \to 0, \tag{3.2}$$

причем Γ-модуль $\operatorname{Div}_{\overline{X_c}\setminus\overline{X}}\overline{X_c}$ пермутационный, т.е. обладает Γ-инвариантным базисом. Согласно недавнему результату Ж.-Л. Кольо-Телена и Б. Э. Кунявского [18] Γ-модуль $\operatorname{Pic}\overline{X_c}$ вялый (flasque), т.е.

$$H^1(\Gamma', \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Pic}\overline{X_c}, \mathbb{Z})) = 0$$

для любой замкнутой подгруппы $\Gamma' \subset \Gamma$. Как хорошо известно и легко доказывается, отсюда вытекает, что гомоморфизм r индуцирует изоморфизм $H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{X_c})$ с подгруппой $\text{Ш}^1_\omega(k, \widehat{T})$. Тот же гомоморфизм задает коммутативную диаграмму спариваний

$$\begin{array}{ccc}
H^1(k,\operatorname{Pic}\overline{X}) \times \operatorname{Ext}^2_k(\operatorname{Pic}\overline{X},\bar{k}^*) & \longrightarrow & H^3(k,\bar{k}^*) \\
\uparrow \qquad\qquad \downarrow & & \| \\
H^1(k,\operatorname{Pic}\overline{X_c}) \times \operatorname{Ext}^2_k(\operatorname{Pic}\overline{X_c},\bar{k}^*) & \longrightarrow & H^3(k,\bar{k}^*)
\end{array}.$$

Теперь утверждение вытекает из функториальности $e(X)$ (см. замечание в п. 1).

Это следствие несколько усиливает утверждение теоремы A (iii) статьи [18] в случае, когда G не имеет торической части.

Автор благодарен Ж.-Л. Кольо-Телену, А. М. Левину и С. Ленгу за полезные беседы, а также Институту Макса Планка (Бонн) за гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Grothendieck, “Le groupe de Brauer. I, II, III”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, eds. A. Grothendieck, N. H. Kuipers, North-Holland & Masson, Amsterdam–Paris, 1968, 46–66, 67–87, 88–188.

[2] J-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles. II”, *Duke Math. J.*, **54**:2 (1987), 375–492.

[3] A. Skorobogatov, *Torsors and Rational Points*, Cambridge Tracts in Math., **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, “The elementary obstruction and homogeneous spaces”, *Preprint*, 2006.

[5] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, “Faisceaux pervers”, *Analysis and topology on singular spaces*, I (Luminy, 1981), Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982, 5–171.

[6] A. N. Skorobogatov, “Beyond the Manin obstruction”, *Invent. Math.*, **135**:2 (1999), 399–424.

[7] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Math., **1**, Academic Press, Boston, MA, 1986.

[8] F. Oort, *Commutative Group Schemes*, Lecture Notes in Math., **15**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1966.

[9] J. S. Milne, “The homological dimension of commutative group schemes over a perfect field”, *J. Algebra*, **16** (1970), 436–441.

[10] Ж. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968.

[11] A. Weil, “On algebraic groups and homogeneous spaces”, *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 493–512.

[12] J. van Hamel, “Lichtenbaum–Tate duality for varieties over p-adic fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **575** (2004), 101–134.

[13] Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968.

[14] B. Iversen, “Brauer group of a linear algebraic group”, *J. Algebra*, **42**:2 (1976), 295–301.

[15] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

[16] T. Springer, “Nonabelian H^2 in Galois cohomology”, *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proc. Symp. Pure Math., **9**, eds. A. Borel, G. D. Mostow, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 164–182.

[17] M. V. Borovoi, “Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology”, *Duke Math. J.*, **72**:1 (1993), 217–239.

[18] J.-L. Colliot-Thélène, B. È. Kunyavskiĭ, “Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d’espaces homogènes”, *J. Algebraic Geom.*, **15**:4 (2006), 733–752.

[19] M. Borovoi, “A cohomological obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces”, *Math. Ann.*, **314**:3 (1999), 491–504.

[20] Ф. А. Богомолов, “Группа Брауэра полей инвариантов алгебраических групп”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 279–293.

А. Н. Скоробогатов
Институт проблем передачи информации РАН,
Imperial College London, England
E-mail: a.skorobogatov@imperial.ac.uk

Поступило
21.10.2005
Исправленный вариант
04.07.2006