Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme

J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov

à Peter Swinnerton-Dyer en signe d'admiration

Abstract

The aim of the paper is twofold. On the one hand, we study the Brauer group of a smooth and proper model of the k-variety given by $P(t) = \mathrm{Norm}_{K/k}(z)$, where $P(t)$ is a polynomial, and $\mathrm{Norm}_{K/k}(z)$ is the norm form defined by a finite field extension K/k, with k an essentially arbitrary field. Under some additional hypotheses we compute this group explicitly. On the other hand, when k is the field of rational numbers, and $P(t)$ is a product of arbitrary powers of two linear factors, we prove that the Brauer–Manin obstruction to the Hasse principle and weak approximation is the only one.

1 Introduction

Cet article est consacré à l'étude des points rationnels de variétés définies, sur un corps de nombres k, par une équation

$$P(t) = N_{K/k}(\mathbf{z}), \tag{1}$$

où $P(t) \in k[t]$ est un polynôme à une variable, K/k une extension finie de corps et $N_{K/k}(\mathbf{z})$, pour $\mathbf{z}$ variable dans K, est la forme normique associée à cette extension. Pour l'histoire de ce problème, on pourra consulter [CTPest].

Lorsque k est le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, Heath-Brown et l'un des auteurs [HBSk] ont démontré que pour le polynôme $P(t) = \alpha t^a(t-1)^b$, où $(a,b) = 1$ et $\alpha \in k^*$, l'obstruction de Brauer–Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour tout modèle propre et lisse X^c de (1). Une variante de leur démonstration est donnée dans [CTPest].

Le but de cet article est double. D'une part on étudie, sur un corps k essentiellement arbitraire, et pour un polynôme $P(t)$ quelconque, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X^c)$. D'autre part, sur $k = \mathbb{Q}$, on généralise le résultat de [HBSk] au cas $P(t) = \alpha t^a(t-1)^b \in \mathbb{Q}[t]$ avec a et b quelconques.

En ce qui concerne le groupe de Brauer, la difficulté réside dans le fait qu'il semble difficile, pour une extension K/k arbitraire, d'écrire un modèle projectif et lisse X^c de la k-variété définie par (1) ; nous calculons le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ d'un modèle lisse X non propre, mais assez gros, de (1). Ce calcul est fait au paragraphe 2, sur un corps k de caractéristique zéro, et *pour K/k et $P(t)$ quelconques*. Les principaux résultats sont la proposition 2.3 et la proposition 2.5. Sous des hypothèses supplémentaires convenables, on en tire des conséquences sur le groupe de Brauer de X^c (corollaires 2.6 et 2.7, propositions 2.11 et 2.12).

Au paragraphe 3, dans le cas $P(t) = \alpha t^a(t-1)^b$, nous appliquons la méthode de la "descente ouverte" ([CTSk]) à la variété X introduite au paragraphe 2. Dans [HBSk] et [CTPest] cette méthode avait été appliquée à l'ouvert de lissité de la variété définie par (1), ouvert qui est strictement contenu dans la variété X ici considérée. C'est ce changement de modèle qui explique les progrès faits dans le présent article (théorème 3.1 et corollaire 3.2).

2 Calcul de groupes de Brauer

Soient k un corps de caractéristique zéro et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On note $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. On note $H^i(\Gamma_k, M)$ ou plus simplement $H^i(k, M)$ les groupes de cohomologie du groupe profini Γ_k à valeurs dans un Γ_k-module continu discret M.

On supposera le lecteur familier avec la théorie des k-tores algébriques ([CTSa1], §2 ; [Vosk]).

Soit X une k-variété, c'est-à-dire un k-schéma séparé de type fini. On note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, puis $k[X]^* = H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$ le groupe des unités de X et $\overline{k}[X]^* = H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^*)$ celui de $\overline{X}$. On note $\mathrm{Pic}(X) = H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{O}_X^*)$ le groupe de Picard de X. Le théorème 90 de Hilbert revu par Grothendieck identifie ce groupe à $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$.

Dans cet article, la notation $\mathrm{Br}(X)$ est utilisée pour le groupe de Brauer cohomologique $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ d'une k-variété X. Rappelons aussi les notations usuelles

$$\mathrm{Br}_0(X) = \mathrm{Im}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)], \quad \mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})].$$

La suite spectrale de Leray $E_2^{pq} = H^p(k, H^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Longrightarrow H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ donne naissance à la suite exacte (cf. [CTSa3], (1.5.0))

$$H^2(k, \overline{k}[X]^*) \to \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \overline{k}[X]^*).$$

Si l'on a $\overline{k}^* = \overline{k}[X]^*$ (c'est par exemple le cas pour X propre, réduite, et géométriquement connexe), alors cette suite s'écrit

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \overline{k}^*),$$

soit encore

$$0 \to \mathrm{Br}_0(X) \to \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \overline{k}^*).$$

Notons que $H^3(k, \overline{k}^*) = 0$ si k est un corps de nombres ([CF], 7.11.4). Par ailleurs la flèche $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \overline{k}^*)$ est nulle si $X(k) \neq \emptyset$; en effet tout k-point de X définit une rétraction de la flèche

$$H^3(k, \overline{k}^*) = E_2^{30} \to E_\infty^{30} \subset H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m),$$

et donc toutes les différentielles de la suite spectrale aboutissant aux termes E_n^{30} sont nulles.

Soit $P(t)$ un polynôme. Ecrivons-le $P(t) = \alpha \prod_{i=1}^m p_i(t)^{a_i}$ avec $\alpha \in k^*$ et avec les polynômes $p_i(t)$ irréductibles, unitaires et distincts deux à deux. On note d_i le degré de $p_i(t)$ et $s = \sum_i a_i d_i$ le degré de P. On suppose $\prod_{i=1}^m p_i(t)$ de degré au moins égal à 2. Soit $k \subset K \subset \overline{k}$ une extension de degré n, et $N_{K/k} \colon K^* \to k^*$ l'application définie par la norme. Soit $\omega_1, \dots, \omega_n$ une k-base de K. On note $N_{K/k}(\mathbf{z})$ la forme normique associée, où $\mathbf{z} = z_1\omega_1 + \cdots + z_n\omega_n$ est une K-variable.

Soit $V \subset \mathbf{A}_k^{n+1} \simeq \mathbf{A}_k^1 \times_k R_{K/k}(\mathbf{A}_K^1)$ l'ouvert de lissité de l'hypersurface affine définie par l'équation (1).

La projection $(t, \mathbf{z}) \mapsto t$ définit un morphisme surjectif $p \colon V \to \mathbf{A}_k^1$. Soit $U_0 \subset \mathbf{A}_k^1$ l'ouvert donné par $P(t) \neq 0$, et soit $U = p^{-1}(U_0) \subset V$. La k-variété U est la variété affine définie par le système $P(t) = N_{K/k}(\mathbf{z}) \neq 0$. La restriction de p à U est un U_0-torseur sous le tore normique $T = R^1_{K/k}(\mathbb{G}_m)$, lequel est déployé par le passage de k à $\overline{k}$. Comme le groupe de Picard de $\overline{U}_0$ est nul, il existe un isomorphisme de $\overline{k}$-variétés $\overline{U} \simeq \overline{U}_0 \times_{\overline{k}} \overline{T} \simeq \overline{U}_0 \times \mathbb{G}_m^{n-1}$. Il en résulte que $\mathrm{Pic}(\overline{U}) = 0$ et que le quotient $\overline{k}[U]^*/\overline{k}^*$ est engendré par les facteurs linéaires de $P(t)$ sur $\overline{k}$ et les caractères du tore $\overline{T}$.

Soit T^c une compactification lisse équivariante de T (voir [CTHaSk]). Le produit contracté $U \times^T T^c$ est une compactification partielle de U, propre et lisse sur U_0. Soit[1] X la k-variété lisse obtenue par recollement de V avec $U \times^T T^c$ le long de U. Soit $\pi \colon X \to \mathbf{A}_k^1$ le morphisme naturel, et $\overline{\pi} = \pi \times_k \overline{k}$. Comme toute fibre de π est contenue soit dans V soit dans $U \times^T T^c$, et que chacune des k-variétés V et $U \times^T T^c$ est séparée, le k-schéma de type fini X est séparé. C'est donc une k-variété.

La fibre générique X_η de π est projective et géométriquement intègre sur $k(t)$. Une fonction inversible sur $\overline{X}$ provient donc de $\overline{k}(t)^*$. Si un élément de

[1]Dans la construction qui suit, au lieu de recourir à une compactification lisse équivariante de T, on pourrait se contenter de l'existence d'une k-variété lisse et propre sur U_0 jouant le rôle de $U \times^T T^c$, ce qui est fourni par le théorème de Hironaka. Il faut alors modifier le diagramme de la proposition 2.2.

$\overline{k}(t)^*$ n'est pas constant, alors il possède un diviseur non trivial sur $\overline{V}$. Ainsi $\overline{k}[X]^* = \overline{k}^*$ (on a en fait l'énoncé plus précis $\overline{k}[V]^* = \overline{k}^*$).

Soit X^c une k-compactification lisse de X telle que π s'étende à un morphisme (encore noté π) $X^c \to \mathbf{P}^1_k$. L'existence de X^c découle du théorème de Hironaka. Le module galoisien $\mathrm{Div}_{\overline{X}\setminus\overline{U}}(\overline{X})$ des diviseurs de $\overline{X}$ à support hors de $\overline{U}$ est la somme directe du module des diviseurs "verticaux" $\mathrm{Div}_v := \mathrm{Div}_{\overline{V}\setminus\overline{U}}(\overline{V})$, librement engendré par les composantes irréductibles des fibres dégénérées, et du module Div_h des diviseurs de $\overline{U} \times^{\overline{T}} \overline{T^c}$ à support hors de $\overline{U}$, c'est-à-dire des diviseurs "horizontaux".

Le lemme suivant est sans doute bien connu (cf. [Sa], §6.b), mais nous ne l'avons pas trouvé explicitement dans la littérature.

Lemme 2.1 *Soit E un espace principal homogène sous un k-tore T. Soient T^c une compactification équivariante de T et E^c le produit contracté $E \times^T T^c$. Soit K/k une extension galoisienne de corps, de groupe de Galois G, déployant le k-tore T. Alors il existe un isomorphisme naturel de suites exactes de G-modules*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widehat{T} & \longrightarrow & \mathrm{Div}_{T^c_K\setminus T_K}(T^c_K) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(T^c_K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\
0 & \longrightarrow & K[E]^*/K^* & \longrightarrow & \mathrm{Div}_{E^c_K\setminus E_K}(E^c_K) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(E^c_K) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Démonstration On a la suite exacte de G-modules

$$0 \to K[E]^*/K^* \to \mathrm{Div}_{E^c_K\setminus E_K}(E^c_K) \to \mathrm{Pic}(E^c_K) \to 0. \qquad (\mathcal{E})$$

On peut écrire la suite exacte analogue pour $E_{k(E)} := E \times_k k(E)$, où $k(E)$ est le corps des fonctions de E, et l'extension galoisienne $K(E)/k(E)$ (de groupe G) au lieu de K/k :

$$0 \to K(E)[E_{k(E)}]^*/K(E)^* \to \mathrm{Div}_{E^c_{K(E)}\setminus E_{K(E)}}(E^c_{K(E)}) \to \mathrm{Pic}(E^c_{K(E)}) \to 0$$

où $E_{K(E)} := E \times_k K(E)$, $E^c_{K(E)} := E^c \times_k K(E)$. La projection $E_{k(E)} \to E$ induit un isomorphisme galoisien de la première de ces suites dans la seconde, car k est algébriquement clos dans $k(E)$.

Pour $E = T$, il est bien connu que $K[T]^*/K^* = \widehat{T}$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la projection $T_{k(E)} \to T$ induit un isomorphisme galoisien de la première suite horizontale dans l'énoncé du lemme avec la suite

$$0 \to K(E)[T_{k(E)}]^*/K(E)^* \to \mathrm{Div}_{T^c_{K(E)}\setminus T_{K(E)}}(T^c_{K(E)}) \to \mathrm{Pic}(T^c_{K(E)}) \to 0.$$

Il suffit alors d'observer que le point générique de E définit un isomorphisme de $T_{k(E)}$-espaces principaux homogènes $T_{k(E)} \simeq E_{k(E)}$, qui induit un

$T_{k(E)}$-isomorphisme équivariant $T^c_{k(E)} \simeq E^c_{k(E)}$, lequel induit un isomorphisme entre la suite pour $T_{k(E)}$ et celle pour $E_{k(E)}$. $\square$

Notons $\mathbb{Z}[K/k]$ le Γ_k-module induit $\mathbb{Z}[\Gamma_k/\Gamma_K]$. Au polynôme $P(t)$ nous attachons le Γ_k-module de permutation $\mathbb{Z}_P$, qui est la somme directe des $\mathbb{Z}[L_i/k]$, où $L_i = k[t]/p_i(t)$. Il est évident que le module $\overline{k}[U_0]^*/\overline{k}^*$, librement engendré en tant que groupe abélien par les classes des facteurs linéaires de $P(t)$ sur $\overline{k}$, est isomorphe à $\mathbb{Z}_P$. D'autre part le module galoisien Div_v est librement engendré par les composantes irréductibles du diviseur défini par $P(t) = N_{K/k}(\mathbf{z}) = 0$ sur $\overline{V}$, il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}[K/k] \otimes \mathbb{Z}_P$. Quant au module galoisien Div_h, on voit en utilisant le lemme 2.1 qu'il est isomorphe au module $\mathrm{Div}_{\overline{T^c}\setminus\overline{T}}(\overline{T^c})$ (voir la fin de la démonstration de la proposition suivante).

L'énoncé suivant permet de contrôler le Γ_k-module $\mathrm{Pic}(\overline{X})$:

Proposition 2.2 *Il existe un diagramme commutatif de Γ_k-modules, dont les lignes et les colonnes sont exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}_P & \to & \mathbb{Z}[K/k]\otimes\mathbb{Z}_P & \to & \widehat{T}\otimes\mathbb{Z}_P & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \overline{k}[U]^*/\overline{k}^* & \to & (\mathbb{Z}[K/k]\otimes\mathbb{Z}_P)\oplus\mathrm{Div}_h & \to & \mathrm{Pic}(\overline{X}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \widehat{T} & \to & \mathrm{Div}_h & \to & \mathrm{Pic}(\overline{T^c}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \qquad (2)$$

Démonstration Expliquons d'abord comment ce diagramme est construit. La suite exacte horizontale supérieure est obtenue par tensorisation par $\mathbb{Z}_P$ de la suite exacte naturelle

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[K/k] \to \widehat{T} \to 0,$$

où la flèche $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[K/k]$ envoie 1 sur la norme $N_{K/k}$ (somme des éléments de Γ_k/Γ_K, i.e. des plongements de K dans $\overline{k}$). Dans la suite exacte horizontale médiane, la flèche $\overline{k}[U]^*/\overline{k}^* \to (\mathbb{Z}[K/k]\otimes\mathbb{Z}_P)\oplus\mathrm{Div}_h$ associe à une fonction son diviseur sur $\overline{X}$.

La flèche $\mathbb{Z}[K/k]\otimes\mathbb{Z}_P \to (\mathbb{Z}[K/k]\otimes\mathbb{Z}_P)\oplus\mathrm{Div}_h$ est simplement la flèche d'inclusion via le premier facteur. La flèche $\mathbb{Z}_P \to \overline{k}[U]^*/\overline{k}^*$ est la flèche naturelle $\overline{k}[U_0]^*/\overline{k}^* \to \overline{k}[U]^*/\overline{k}^*$. Le carré en haut à gauche commute, comme on voit en calculant le diviseur, sur $\overline{X}$, des facteurs linéaires de $P(t)$ sur $\overline{k}$. Ceci définit la flèche $\widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$.

Les flèches de la suite horizontale médiane dans la suite horizontale inférieure sont définies par la restriction de X à la fibre générique X_η de π. Cette restriction tombe a priori dans la suite de Γ_k-modules $(\mathcal{E})$ relative à l'extension $\overline{k}(t)/k(t)$, à l'espace principal homogène U_η du $k(t)$-tore $T_{k(t)}$, et à $X_\eta = U_\eta \times^{T^c_\eta} T_\eta$. D'après le lemme 2.1, cette suite est isomorphe à la suite de Γ_k-modules $(\mathcal{E})$ relative à l'extension $\overline{k}(t)/k(t)$, au $k(t)$-tore $T_{k(t)}$ et à $T^c_{k(t)}$. Mais les arguments du lemme 2.1 montrent aussi que cette suite de Γ_k-modules est isomorphe (par image réciproque de k à $k(t)$) à la suite de Γ_k-modules $(\mathcal{E})$ relative à l'extension $\overline{k}/k$, au k-tore T et à T^c. □

Proposition 2.3 *Le groupe* $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ *est sans torsion, et* $\mathrm{Br}(\overline{X})$ *est nul.*

Démonstration Comme $\mathrm{Pic}(\overline{T}^c)$ est libre de type fini ([CTSa3], Cor. 2.A.2, p. 461), la colonne de droite du diagramme montre que $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est sans torsion. Pour le deuxième énoncé, notons que puisque X est une k-variété lisse, $\mathrm{Br}(\overline{X})$ s'injecte dans le groupe de Brauer de la fibre générique $X_{\overline{k}(t)}$ de $\bar{\pi}\colon \overline{X} \to \mathbf{A}^1_{\overline{k}}$. Mais $X_{\overline{k}(t)}$ est une variété propre, lisse et rationnelle sur $\overline{k}(t)$. Comme le groupe de Brauer est, en caractéristique zéro, un invariant birationnel des variétés projectives et lisses ([Gr], Cor. 7.5) et que le groupe de Brauer de l'espace projectif sur un corps coïncide avec le groupe de Brauer du corps de base (énoncé facile à obtenir en caractéristique zéro, par réduction au cas de la droite affine), on a $\mathrm{Br}(X_{\overline{k}(t)}) = \mathrm{Br}(\overline{k}(t))$. Ce dernier groupe est trivial, comme il résulte du théorème de Tsen. □

Dans le diagramme (2), on dispose d'une section évidente de la projection

$$(\mathbb{Z}[K/k] \otimes \mathbb{Z}_P) \oplus \mathrm{Div}_h \to \mathrm{Div}_h \,.$$

Ceci définit (via la commutativité du carré de droite du diagramme (2), qui donne la flèche $\mathrm{Div}_h \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$) un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widehat{T} & \to & \mathrm{Div}_h & \to & \mathrm{Pic}(\overline{T^c}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P & \to & \mathrm{Pic}(\overline{X}) & \to & \mathrm{Pic}(\overline{T^c}) & \to & 0 \end{array} \tag{3}$$

Soit $N_i = N_{L_i/k} \in \mathbb{Z}[L_i/k]$ la somme $\sum_\sigma \sigma$ pour σ parcourant les plongements de L_i dans $\overline{k}$. Soit $\chi \in \widehat{T}$, image de $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}[K/k]$ par la surjection canonique. Si on ajoute à $\chi \in \mathrm{Div}_h$ l'élément de $\mathrm{Div}_v = \mathbb{Z}[K/k] \otimes \mathbb{Z}_P$ défini par $\tilde{\chi} \otimes (\sum a_i N_i)$, on obtient le diviseur de la fonction χ (inversible sur $\overline{U}$). Il en résulte que la flèche $\widehat{T} \to \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P$ dans le diagramme (3) est induite, par tensorisation par $\widehat{T}$, par la flèche $j_P\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_P$ envoyant 1 sur $-\sum_{i=1}^m a_i N_i$.

Observons ici que la flèche j_P admet une rétraction Galois-équivariante si et seulement si les entiers $a_i d_i$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Pour un Γ_k-module M on définit le groupe

$$Ш^i_\omega(M) := \bigcap_{g \in \Gamma_k} \mathrm{Ker}[H^i(\Gamma_k, M) \to H^i(\langle g \rangle, M)],$$

où $\langle g \rangle \subset \Gamma_k$ est le sous-groupe procyclique engendré par g. Si M est un Γ_k-module de permutation, ou bien si M est déployé par une extension K/k de groupe de Galois métacyclique (i.e. dont tous les sous-groupes de Sylow sont cycliques), alors $Ш^2_\omega(M) = 0$.

On sait ([Vosk], Chap. 2, §4.6 ; [CTSa1], preuve de la Prop. 6) que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{T^c})$ est $\hat{H}^{-1}$-trivial. En particulier, pour tout sous-groupe procyclique $\langle g \rangle \subset \Gamma_k$, on a l'égalité $H^1(\langle g \rangle, \mathrm{Pic}(\overline{T^c})) = 0$ via la 2-périodicité de la cohomologie d'un groupe (fini) cyclique ([CF], Chap. IV, §8, theorem 5). De la suite exacte inférieure du diagramme (2) on déduit alors classiquement ([CTSa2], Prop. 9.5) l'isomorphisme $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T^c})) \simeq Ш^2_\omega(\widehat{T})$.

Définition 2.4 Pour un Γ_k-module M on définit

$$Ш^2_\omega(M)_P = \mathrm{Ker}[j_{P*} \colon Ш^2_\omega(M) \to Ш^2_\omega(M \otimes \mathbb{Z}_P)].$$

Proposition 2.5 *Soit X/k comme ci-dessus.*

a) Il y a une suite exacte naturelle

$$0 \to H^1(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P)/j_{P*}H^1(k, \widehat{T}) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to Ш^2_\omega(\widehat{T})_P \to 0.$$

b) Les éléments de $\mathrm{Br}(X)$ *dont l'image dans* $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ *provient de* $H^1(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P)$ *sont précisément les éléments du groupe de Brauer vertical de X par rapport à la projection $X \to \mathbf{A}^1_k$, c'est-à-dire les éléments de* $\mathrm{Br}(X)$ *dont la restriction à la fibre générique X_η provient de* $\mathrm{Br}(k(t))$*.*

Démonstration De la suite inférieure du diagramme (3) on tire la suite exacte

$$\mathrm{Pic}(\overline{T^c})^{\Gamma_k} \to H^1(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T^c})) \\ \to H^2(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P).$$

D'autre part, de la suite supérieure on déduit, comme on a vu, un isomorphisme $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T^c})) \simeq Ш^2_\omega(\widehat{T})$, et du calcul de la flèche $j_P \colon \widehat{T} \to \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P$ dans ce diagramme, et de la nullité de $H^1(k, \mathrm{Div}_h)$, on tire la suite exacte annoncée en a).

On a vu plus haut $\overline{k}^* = \overline{k}[X]^*$ et $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$, donc $\mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Br}(X)$. On a donc la suite exacte

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \overline{k}^*).$$

Pour la fibre générique $X_\eta = X_{k(t)}$, on a $\mathrm{Br}(X_{\overline{k}(t)}) = \mathrm{Br}(\overline{k}(t)) = 0$, et la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la projection $X_{\overline{k}(t)} \to X_{k(t)}$ et le faisceau étale $\mathbb{G}_m$ donne naissance à la suite exacte

$$\mathrm{Br}(k(t)) \to \mathrm{Br}(X_{k(t)}) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\overline{k}(t)})) \to H^3(k, \overline{k}(t)^*)$$

et la première suite s'envoie de façon naturelle dans la seconde.

La flèche $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(X_{\overline{k}(t)}))$ s'identifie à la flèche

$$H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T}^c)),$$

dont le noyau est précisément l'image de $H^1(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P)$. Ceci établit le point b). $\square$

Remarque On peut en fait décrire précisément les éléments de $\mathrm{Br}(X)$ dont la classe dans $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ provient de $H^1(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P)$. Ce dernier groupe est naturellement isomorphe au groupe

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}[H^1(L_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(L_i \otimes_k K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})].$$

Soit θ_i la classe de t dans $L_i = k[t]/p_i(t)$. Soit

$$\{\chi_i\}_{i=1,\ldots,m} \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}[H^1(L_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(L_i \otimes_k K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})].$$

On peut alors considérer

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Cores}_{L_i(t)/k(t)}(t - \theta_i, \chi_i) \in \mathrm{Br}(k(t)),$$

et vérifier directement que la restriction de A au corps des fonctions de X est non ramifiée sur X.

Corollaire 2.6 *Dans chacun des cas suivants, le groupe de Brauer* $\mathrm{Br}(X)$ *est vertical par rapport à* $X \to \mathbf{A}^1_k$*, et il en est de même, a fortiori, du groupe de Brauer* $\mathrm{Br}(X^c)$ *par rapport à* $X^c \to \mathbf{P}^1_k$ *:*

a) le groupe de Brauer de T^c *est réduit au groupe de Brauer de* k *;*

b) le tore $T = R^1_{K/k}\mathbb{G}_m$ *est un facteur direct d'un* k*-tore* k*-rationnel ;*

c) le groupe de Galois de la clôture galoisienne de K/k a tous ses sous-groupes de Sylow cycliques (ce qui est clairement le cas si l'extension K/k est cyclique) ;

d) l'extension K/k est de degré premier ;

e) le p.g.c.d. des $a_i.d_i$ est égal à 1 (ce qui est clairement le cas si l'un des p_i est de degré $d_i = 1$ et de multiplicité $a_i = 1$).

Démonstration On rappelle les faits suivants. Si K/k satisfait c) ou d), alors T satisfait b) ([CTSa1], Prop. 2 et Prop. 6, et [CTSa2], Prop. 9.1). Si T satisfait b), il satisfait a) ([CTSa1], Prop. 6). Sous a), on a $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T^c})) = 0$ (voir le début du pagraphe 2, et observer que $T^c(k)$ contient $T(k)$ et donc est non vide). Ainsi ([CTSa2], Prop. 9.5) $Ш^2_\omega(\widehat{T}) = 0$. L'hypothèse e) implique que la flèche $j_P \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_P$ admet une rétraction Galois-équivariante. On a alors $Ш^2_\omega(M)_P = 0$ pour tout module galoisien M, en particulier pour $\widehat{T}$. □

Remarque Supposons que k est un corps de nombres, et admettons l'hypothèse de Schinzel (cf. [CTSD], §4). Lorsque K/k est cyclique, on sait alors (extension due à Serre d'un ancien résultat de Sansuc et de l'un des auteurs, voir [CTSD], Th. 4.2) que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule obstruction pour X^c. Mais pour K/k plus général, on ne sait le faire sous aucune des hypothèses a), b), c), d) ci-dessus, bien que chacune de ces hypothèses implique la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible pour les fibres lisses de $X^c \to \mathbf{P}^1_k$.

Corollaire 2.7 *Supposons que $P(t)$ est un produit de facteurs linéaires sur k dont les multiplicités sont premières entre elles dans leur ensemble, et que l'extension K/k ne contient pas de sous-extension cyclique non triviale. Alors le groupe de Brauer de X est réduit à l'image $\mathrm{Br}_0(X)$ de $\mathrm{Br}(k)$. A fortiori le groupe de Brauer de X^c est-il réduit à l'image $\mathrm{Br}_0(X^c)$ de $\mathrm{Br}(k)$.*

Démonstration L'hypothèse sur les multiplicités implique $Ш^2_\omega(\widehat{T})_P = 0$ (corollaire précédent, cas e)). Sous l'hypothèse faite sur K/k, le noyau de la restriction $H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est trivial, soit encore $H^1(k, \widehat{T}) = 0$. Comme P est déployé, on a alors

$$H^1(k, \widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P) = 0.$$

On a donc $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$, et donc $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_0(X)$. □

Exemple Supposons l'extension K/k de degré premier, non cyclique, et le polynôme $P(t)$ déployé. Alors, sans hypothèse sur les a_i, on a l'égalité $\mathrm{Br}_0(X) = \mathrm{Br}(X)$ et donc $\mathrm{Br}_0(X^c) = \mathrm{Br}(X^c)$. On a en effet dans ce cas

$H^1(k,\widehat{T}) = 0$, donc $H^1(k,\widehat{T}\otimes\mathbb{Z}_P) = 0$ et par ailleurs T est un facteur direct d'un k-tore k-rationnel ([CTSa2], Prop. 9.1), donc $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{T^c})) = 0$ ([CTSa1], Prop. 6). Ainsi $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$.

Il serait souhaitable de décrire le sous-groupe $\mathrm{Br}(X^c) \subset \mathrm{Br}(X)$. Nous donnons quelques résultats concernant la partie verticale, par rapport au morphisme $\pi\colon X^c \to \mathbf{P}^1_k$, de $\mathrm{Br}(X^c)$.

Notons $F = k(U) = k(X^c)$ le corps des fonctions de X^c. Etant donné $A \in \mathrm{Br}(k(t))$, on note A_F son image dans $\mathrm{Br}(F)$ par l'inclusion $k(t) \subset F$ induite par $X^c \to \mathbf{P}^1_k$.

Proposition 2.8 *Supposons que le polynôme $P(t)$, de degré s, est de la forme $t^aQ(t)$ avec $a > 0$ et $Q(0) \neq 0$. Soit $\chi \in \mathrm{Ker}[H^1(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$.*

a) La classe d'algèbre cyclique sur $k(t)$ définie par le cup-produit (t^a,χ) définit un élément de $\mathrm{Br}(k(X^c))$ non ramifié sur l'image réciproque de $\mathbf{A}^1_k$ dans X^c.

b) Pour tout polynôme $R(t) \in k[t]$, la classe de l'algèbre $s(R(t),\chi)$ définit un élément de $\mathrm{Br}(k(X^c))$ qui est non ramifié aux points de codimension 1 de X^c situés au-dessus du point à l'infini de $\mathbf{P}^1_k$.

Démonstration Rappelons tout d'abord la notation employée. Soient K un corps, K_s une clôture séparable de K, $\rho \in K^*$ et $\xi \in H^1(\mathrm{Gal}(K_s/K),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On note $(\rho,\xi) \in \mathrm{Br}(K)$ le cup-produit de $\rho \in K^* = H^0(\mathrm{Gal}(K_s/K),K_s^*)$ avec le bord $\delta(\xi) \in H^2(\mathrm{Gal}(K_s/K),\mathbb{Z})$, le bord δ étant pris pour la suite exacte évidente $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$.

Pour établir la proposition, il suffit de vérifier que la restriction de (t^a,χ) à $F = k(X_c)$ est non ramifiée au-dessus du point O défini par $t = 0$ dans $\mathbf{A}^1_k$. L'égalité $t^aQ(t) = N_{K/k}(\mathbf{z}) \in F$ implique l'égalité

$$(t^aQ(t),\chi)_F = (N_{K/k}(\mathbf{z}),\chi) \in \mathrm{Br}(F).$$

On en déduit $(N_{K/k}(\mathbf{z}),\chi) = N_{K/k}(\mathbf{z},\chi_K) \in \mathrm{Br}(F)$ par la formule de projection. Par hypothèse, la restriction χ_K de χ à K est nulle. Ainsi

$$(t^aQ(t),\chi)_F = 0 \in \mathrm{Br}(F)$$

et $(t^a,\chi) = a(t,\chi)_F = -(Q(t),\chi)_F$ est clairement non ramifié aux points de X^c au-dessus de O. Soit $u = 1/t$. L'égalité $P(t) = N_{K/k}(\mathbf{z})$ dans F donne une égalité $H(u) = u^sN_{K/k}(\mathbf{z})$, avec $H \in k[u]$ satisfaisant $H(0) \neq 0$. Procédant comme ci-dessus, on voit que pour tout $\chi \in \mathrm{Ker}[H^1(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$, et tout $R(t) \in k[t]$, la classe de l'algèbre $s(R(t),\chi)$ est non ramifiée aux points de codimension 1 de X^c situés au-dessus du point à l'infini ($u = 0$) de $\mathbf{P}^1_k$. $\square$

Proposition 2.9 *Supposons que le polynôme $P(t)$, de degré s, est de la forme $t^a Q(t)$ avec $a > 0$ et $Q(0) \neq 0$. Soit $\chi \in H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ quelconque. Supposons que $(t,\chi)_F \in \mathrm{Br}(F)$ est non ramifié aux points de X^c au-dessus de $t = 0$. Alors :*

a) $\chi \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$.

b) Pour $r = n/(n,a)$, on a $r\chi = 0$ dans $H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Démonstration Pour l'énoncé a), il suffit de comparer le résidu de (t,χ) en le point $t = 0$ de $\mathbf{A}^1_k$ et le résidu de $(t,\chi)_F$ au point générique du diviseur de X défini par $t = 0$; en effet la clôture algébrique de k dans le corps des fonctions de la k-variété d'équation $N_{K/k}(\mathbf{z}) = 0$ est K (pour les propriétés bien connues des résidus, on renvoie au §1 de [CTSD]). Considérons l'énoncé b). Soit $m = a/(n,a)$. Effectuons le changement de base $t = v^r$. On obtient l'équation $v^{nm}Q(v^r) = N_{K/k}(\mathbf{z})$. Le changement de variables $\mathbf{z}' = \mathbf{z}/v^m$ donne une équivalence birationnelle entre la variété d'équation $v^{nm}Q(v^r) = N_{K/k}(\mathbf{z})$ et celle d'équation $Q(v^r) = N_{K/k}(\mathbf{z}')$, changement qui respecte la projection sur la droite affine $\mathrm{Spec}(k[v])$. L'hypothèse implique que $(v^r,\chi)_{F'}$, où F' désigne le corps des fonctions de la nouvelle variété, est non ramifié au-dessus de $v = 0$. Mais la fibre de cette nouvelle fibration au-dessus du point $v = 0$ est géométriquement intègre. Ceci implique ([CTSD], Prop. 1.1.1) que $(v^r,\chi) \in \mathrm{Br}(k(v))$ est non ramifié en $v = 0$, et ceci équivaut à la condition $r\chi = 0 \in H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. □

Supposons que $P(t)$ s'écrit $P(t) = \alpha \prod_{i=1}^m (t - e_i)^{a_i}$, avec $a_i > 0$, chaque e_i dans k et $e_i \neq e_j$ pour $i \neq j$. On a alors $s = \sum_{i=1}^m a_i$. La structure de $\mathrm{Br}(k(t))$, le fait que les fibres de $X \to \mathbf{A}^1_k$ au-dessus des points de U_0 soient géométriquement intègres, et la proposition 2.9 ci-dessus impliquent ([CTSD], Prop. 1.1.1) que tout élément vertical de $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(F)$ est, à addition près d'un élément de $\mathrm{Br}(k)$, l'image réciproque d'un élément de la forme $A = \sum_{i=1}^m (t - e_i, \chi_i)$, avec chaque $\chi_i \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$, satisfaisant de plus $(n/(n,a_i))\chi_i = 0$.

Considérons le cas où tous les a_i sont égaux à 1, i.e. $P(t) = \alpha \prod_{i=1}^s (t - e_i)$ avec $e_i \neq e_j$ pour $i \neq j$. Alors $m = s$. Dans ce cas, d'après le corollaire 2.6, tout le groupe de Brauer de X, et donc de X^c, est vertical. D'après la proposition 2.8, tout élément de la forme $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m (t - e_i, \chi_i) \in \mathrm{Br}(k(t))$, avec chaque caractère $\chi_i \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$, définit un élément $\mathcal{A}_F \in \mathrm{Br}(F) = \mathrm{Br}(k(X^c))$ non ramifié sur l'ouvert de X^c image réciproque de $\mathbf{A}^1_k$. Au-dessus du point à l'infini $u = 0$, la même proposition assure que $s\mathcal{A}_F$ est non ramifié. Comme par ailleurs $n\chi_i = 0$ pour tout i, on voit que $(n,s)\mathcal{A}_F$ est non ramifié sur X^c. Au voisinage du point $u = 0$, l'algèbre $\mathcal{A}$

diffère de l'opposé de $(u, \sum_i \chi_i)$ par une algèbre non ramifiée. Si $\mathcal{A}_F$ est non ramifiée, la proposition 2.9 implique $(n/(n,s)).(\sum_i \chi_i) = 0$.

Notons le cas particulier : si s et n sont premiers entre eux, alors les éléments de $\mathrm{Br}(X^c)$ sont les sommes d'un élément de $\mathrm{Br}(k)$ et d'éléments $(t-e_i, \chi_i)_F$, avec $\chi_i \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$.

Nous avons donc établi la :

Proposition 2.10 *Soit $P(t) = \alpha \prod_{i=1}^s (t-e_i)$ séparable et déployé.*

a) Tout élément de $\mathrm{Br}(X^c) \subset \mathrm{Br}(k(X^c))$ s'écrit $\rho_F + \sum_{i=1}^s (t-e_i, \chi_i)_F$ avec $\rho \in \mathrm{Br}(k)$ et chaque $\chi_i \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$, avec $(n/(n,s)).(\sum_i \chi_i) = 0$.

b) Tout élément de $\mathrm{Br}(k(X^c))$ de la forme $\rho_F + \sum_{i=1}^s (t-e_i, \chi_i)_F$ avec $\rho \in \mathrm{Br}(k)$ et chaque $\chi_i \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$ est non ramifié au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$ et il est non ramifié sur tout X^c si s est premier à $n = [K:k]$.

Considérons maintenant le cas où $P(t)$ est de la forme $P(t) = \alpha t^a (t-1)^b$, avec $(a,b) = 1$. Cette dernière hypothèse assure (corollaire 2.6) que $\mathrm{Br}(X)$ est vertical par rapport à $X \to \mathbf{A}^1_k$, et donc que $\mathrm{Br}(X^c)$ est vertical par rapport à $X^c \to \mathbf{P}^1_k$. Soient c et d tels que que $ad - bc = 1$. D'après la proposition 2.9, tout élément (vertical) de $\mathrm{Br}(X^c)$ provient, à addition près d'un élément de $\mathrm{Br}(k)$, d'un élément de la forme $(t, \chi) + (t-1, \psi) \in \mathrm{Br}(k(t))$, avec χ, ψ dans $\mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$. Le sous-groupe de $k(t)^*$ engendré par t et $(t-1)$ coïncide avec le sous-groupe engendré par $t^a(t-1)^b$ et $t^c(t-1)^d$. Ainsi tout élément de $\mathrm{Br}(X^c)$ provient, à addition près d'un élément de $\mathrm{Br}(k)$, d'un élément de la forme $(t^a(t-1)^b, \chi) + (t^c(t-1)^d, \psi) \in \mathrm{Br}(k(t))$. De l'égalité $\alpha t^a (t-1)^b = N_{K/k}(\mathbf{z})$ dans F et de la formule de projection on déduit que $(t^a(t-1)^b, \gamma)_F$ est dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$ pour tout γ dans le groupe $\mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$. Ainsi tout élément de $\mathrm{Br}(X^c)$ provient, à addition près d'un élément de $\mathrm{Br}(k)$, d'un élément de la forme $\mathcal{A} = (t^c(t-1)^d, \chi) \in \mathrm{Br}(k(t))$, avec $\chi \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$.

Soit $\mathcal{A} \in \mathrm{Br}(k(t))$ un élément arbitraire de cette forme. Soient $A = (a,n)$, $B = (b,n)$, $C = (a+b, n)$. On a $(A,B) = 1$, $(B,C) = 1$, $(A,C) = 1$, ce qui implique que le triplet (AB, AC, BC) n'a pas de diviseur commun. Posons $N = n/ABC \in \mathbb{N}$. Pour tout $\chi \in \mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$, la proposition 2.8 assure que $a\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t = 0$, que $b\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t = 1$, et que $(a+b)\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t = \infty$. La proposition 2.9 montre que si $\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t = 0$, alors $(n/A).\chi = 0$; que si $\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t = 1$, alors $(n/B).\chi = 0$; enfin que si $\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t = \infty$, alors $(n/C).\chi = 0$. Si donc $\mathcal{A}_F$ est non ramifiée sur X^c, on a nécessairement $N\chi = 0$.

Supposons inversement $N\chi = 0$. On voit alors que $(N,a)\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t=0$, $(N,b)\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t=1$ et $(N,a+b)\mathcal{A}_F$ est non ramifiée au-dessus de $t=\infty$.

Nous pouvons énoncer la :

Proposition 2.11 *Supposons $P(t) = \alpha t^a(t-1)^b$, avec $(a,b)=1$. Soient c,d avec $ad-bc=1$. Supposons que le quotient N de n par le produit $(a,n).(b,n).(a+b,n)$ est premier à $a.b.(a+b)$. Alors tout élément du groupe de Brauer de X^c est de la forme $\rho_F+\sigma_F$, avec ρ dans $\operatorname{Br}(k)$ et $\sigma = (t^c(t-1)^d,\chi)$ dans $\operatorname{Br}(k(t))$, où χ est un caractère dans $\operatorname{Ker}[H^1(k,\mathbb{Z}/N)\to H^1(K,\mathbb{Z}/N)]$.*

Exemples 1) Soit $a=2$, $b=3$, $n=30$. Alors $N=1$. Dans ce cas, $\operatorname{Br}(X^c)/\operatorname{Br}(k)=0$.

2) Soit $a=1$, $b=1$, n impair. Alors $N=n$, et $\operatorname{Br}(X^c)/\operatorname{Br}(k)$ est formé des éléments $(t,\chi)_F$ avec $\chi\in\operatorname{Ker}[H^1(k,\mathbb{Z}/n)\to H^1(K,\mathbb{Z}/n)]$. (Pour un exemple concret, voir [CTSal], p. 541.)

3) Soit $a=1$, $b=1$, $n=2m$ avec m impair. Alors $N=m$ et $\operatorname{Br}(X^c)/\operatorname{Br}(k)$ est formé des éléments $(t,\chi)_F$ avec

$$\chi\in\operatorname{Ker}[H^1(k,\mathbb{Z}/m)\to H^1(K,\mathbb{Z}/m)].$$

On comparera les deux derniers exemples avec la proposition suivante.

Proposition 2.12 *Supposons $P(t)=\alpha t(t-1)$.*

a) Soit $\chi\in H^1(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Supposons $(t,\chi)_F$ non ramifié au-dessus du point $t=\infty$. Alors pour toute sous-extension L/k de K/k avec $[K:L]=2$, on a $\chi_L = 0\in H^1(L,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

b) Si l'extension K/k est galoisienne de groupe G, et tout caractère de G trivial sur les éléments d'ordre 2 de G est trivial, alors

$$\operatorname{Br}(X^c)/\operatorname{Br}_0(X^c)=0.$$

c) Si l'extension K/k est galoisienne de groupe G, et que le groupe G est engendré par ses éléments d'ordre 2, alors $\operatorname{Br}(X^c)/\operatorname{Br}_0(X^c)=0$.

Démonstration La L-algèbre $K\otimes_k L$ se décompose en un produit $K\times M$, où M est une L-algèbre séparable. Sur le corps L, la variété qui nous intéresse est définie par l'équation

$$\alpha t(t-1) = N_{K/L}(\mathbf{z}_1).N_{M/L}(\mathbf{w}).$$

Si l'on pose $t=1/u$, puis $\mathbf{z}_2 = u.\mathbf{z}_1$, on obtient l'équation

$$\alpha(1-u) = N_{K/L}(\mathbf{z}_2).N_{M/L}(\mathbf{w}).$$

Ainsi la fibration $X_L^c \to \mathbf{P}^1_L$ est birationnelle, au-dessus de $\mathbf{P}^1_L$, à une fibration dont la fibre en $u = 0$ est géométriquement intègre. L'hypothèse que $(t, \chi)_F$ est non ramifié au-dessus du point $t = \infty$ implique alors que le résidu de $(t, \chi)_L = (1/u, \chi)_L$ en $u = 0$ est nul, i.e. $\chi_L = 0$, et établit le point a). Ainsi χ est dans l'intersection des noyaux des restrictions $H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ pour toutes les sous-extensions $K/L/k$ avec $[K : L] = 2$. Si K/k satisfait l'hypothèse de b), cette intersection est nulle.

D'après la proposition 2.10, tout élément de $\mathrm{Br}(X^c) \subset \mathrm{Br}(F)$ s'écrit comme une somme $\rho_F + (t, \chi)_F + (t-1, \psi)_F$, avec χ et ψ dans le noyau de la restriction $H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. L'équation $\alpha t(t-1) = N_{K/k}(\mathbf{z})$ et la formule de projection montrent qu'un tel élément peut s'écrire sous la forme plus simple $\rho_F + (t, \chi)_F$ avec $\chi \in \ker[H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$. L'énoncé b) résulte alors de a).

L'énoncé c) est une conséquence immédiate. $\square$

Cette proposition s'applique par exemple lorsque K/k est une extension multiquadratique, ou lorsque le groupe G est un groupe symétrique. Elle s'applique aussi lorsque G est un groupe simple différent de $\mathbb{Z}/p$ avec p premier impair, mais on n'obtient alors qu'un cas particulier du corollaire 2.7.

Il semble difficile de décrire des éléments non verticaux de $\mathrm{Br}(X^c)$. Nous devons pour l'instant nous contenter de :

Questions Soit K/k une extension biquadratique, i.e. galoisienne de groupe de Galois $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Soit $T = R^1_{K/k}\mathbb{G}_m$. De la suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G] \to \hat{T} \to 0,$$

on déduit $H^2(H, \hat{T}) \simeq H^3(H, \mathbb{Z})$ pour tout sous-groupe $H \subset G$, donc

$$Ш^2_\omega(\widehat{T}) = \mathbb{Z}/2.$$

a) Soit $P(t) = \alpha \prod_{i=1}^m (t - e_i)^2$, avec $e_i \in k$. On a alors $Ш^2_\omega(\widehat{T})_P = \mathbb{Z}/2$. Sous l'hypothèse $H^3(k, \overline{k}^*) = 0$, satisfaite si k est un corps de nombres, il existe des éléments de $\mathrm{Br}(X)$ qui sont non verticaux par rapport à $X \to \mathbf{A}^1_k$. Ces éléments semblent difficiles à expliciter. Existe-t-il dans $\mathrm{Br}(X^c)$ des éléments non verticaux par rapport à la flèche $X^c \to \mathbf{P}^1_k$?

b) Supposons maintenant que tout facteur irréductible $R(t)$ du polynôme $P(t)$ définisse une extension $k[t]/R(t)$ contenant l'une des trois sous-extensions quadratiques de K/k. On a $Ш^2_\omega(\widehat{T}) = \mathbb{Z}/2$. Par contre pour tout corps L et tout L-tore M déployé par une extension quadratique de L, on a $Ш^2_\omega(\widehat{M}) = 0$. En particulier, avec les hypothèses ci-dessus sur P, on a $Ш^2_\omega(\widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P) = 0$ car $\mathbb{Z}_P = \bigoplus_i \mathbb{Z}[L_i/k]$. On a donc $Ш^2_\omega(\widehat{T})_P = \mathbb{Z}/2$. Il existe donc (Prop. 2.5) un élément de $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ d'image non nulle dans $Ш^2_\omega(\widehat{T})_P$. Sous l'hypothèse $H^3(k, \overline{k}^*) = 0$, un tel élément se relève en un élément (difficile à expliciter) de $\mathrm{Br}(X)$ qui est non vertical par rapport à $X \to \mathbf{A}^1_k$. Existe-t-il un tel élément qui provienne de $\mathrm{Br}(X^c)$? Il est facile de donner un exemple lorsque la k-variété X est k-birationnelle au produit d'un espace principal homogène sous T et d'une droite, mais on aimerait avoir un exemple moins trivial. Il conviendrait par exemple d'étudier l'équation $\alpha.(t^2-a) = N_{K/k}(\mathbf{z})$, avec $K = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Peut-on donner un exemple d'obstruction de Brauer-Manin non verticale (pour $X^c \to \mathbf{P}^1_k$) ?

3 Descente

Soient k un corps des nombres et $\mathbb{A}_k$ l'anneau des adèles de k. Soit X une k-variété et $X(\mathbb{A}_k)$ l'espace topologique des adèles de X. Par somme des invariants locaux, on définit un accouplement continu à gauche

$$X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

C'est l'accouplement de Manin. Pour tout sous-ensemble $B \subset \mathrm{Br}(X)$ on note $X(\mathbb{A}_k)^B \subset X(\mathbb{A}_k)$ le fermé de $X(\mathbb{A}_k)$ formé des adèles orthogonales à B par rapport à l'accouplement ci-dessus. Pour $B = \mathrm{Br}(X)$, on écrit simplement $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. Comme l'observa Manin, la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes assure que l'inclusion diagonale $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)$ se factorise par $X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^B$. L'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)$ est donc contenue dans le fermé $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ de $X(\mathbb{A}_k)$. On dit que l'obstruction de Brauer–Manin (resp. l'obstruction de Brauer–Manin attachée à $B \subset \mathrm{Br}(X)$) est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X si $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ (resp. si $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^B$).

Le principal résultat arithmétique de cet article est le suivant.

Théorème 3.1 *Soient k le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels et K/k une extension finie de corps. Soient $\alpha \in k^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. L'obstruction de Brauer–Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour tout modèle propre et lisse de la variété donnée par l'équation*

$$\alpha t^a (t-1)^b = N_{K/k}(\mathbf{z}), \tag{4}$$

où t est une variable dans k et $\mathbf{z}$ une variable dans K.

Démonstration Si a ou b est nul, l'équation (4) définit une k-variété k-birationnelle à un espace principal homogène sous un tore. Dans ce cas le résultat est bien connu ([Sa], Cor. 8.13). Soit n le degré de K sur k. Un changement de variable birationnel permet de remplacer le couple (a, b) par tout couple d'entiers (a', b') avec a' congru à a modulo n et b' congru à b modulo n. On suppose désormais $a > 0$ et $b > 0$, et l'on reprend les notations et définitions du début du §2 : ouverts $U \subset V$ de la variété définie par (4), tore $T = R^1_{K/k}\mathbb{G}_m$, compactification lisse équivariante T^c, compactification lisse partielle X de V, compactification lisse X^c de X. Il suffit de démontrer notre énoncé pour un modèle donné, par exemple, pour X^c. Soit $\{M_v\} \in X^c(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. Soit Σ un ensemble fini de places de k. On cherche à montrer l'existence d'un point rationnel $M \in X^c(k)$, qui soit de plus arbitrairement proche de chaque M_v pour $v \in \Sigma$.

Comme on a $\overline{k}[X]^* = \overline{k}^*$, que le groupe abélien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est libre de type fini et que $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$, et donc en particulier est fini (proposition 2.3), le corollaire 1.2 de [CTSk] montre que l'ensemble $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ est dense dans $X^c(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. On peut donc supposer $\{M_v\} \in X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

Comme $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est fini et $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est libre de type fini (donc $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est fini), le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_0(X)$ est fini, donc quotient d'un sous-groupe fini B de $\mathrm{Br}(X)$. Soit U l'ouvert de X d'équation $P(t) = N_{K/k}(\mathbf{z}) \neq 0$.

On peut trouver un ensemble fini de places $\Sigma' \supset \Sigma$ (contenant les places archimédiennes de k) tel que X (resp. U) s'étende en un $\mathcal{O}_{\Sigma'}$-schéma lisse $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{U}$), et les éléments de B appartiennent à $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$, où $\mathcal{O}_{\Sigma'} \subset k$ est l'anneau des entiers en dehors de Σ'. Quitte à agrandir Σ', on peut supposer que, pour $v \notin \Sigma'$, $M_v \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$ et $\mathcal{U}(\mathcal{O}_v) \neq \emptyset$ (la dernière propriété résulte du théorème de Lang-Weil et du lemme de Hensel).

Par continuité de l'accouplement $X(k_v) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on peut, pour $v \in \Sigma'$, trouver un point M'_v de $U(k_v)$ qui est proche de M_v et tel que l'on ait $\alpha(M_v) = \alpha(M'_v)$ pour tout $\alpha \in B$. Choisissons M'_v arbitraire dans $\mathcal{U}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \notin \Sigma'$, alors $\alpha(M'_v) = \alpha(M_v) = 0$ pour toute place $v \notin \Sigma'$ et tout $\alpha \in B$, donc $\{M'_v\} \in X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. Finalement on voit que l'on peut supposer M_v dans $U(k_v)$ pour toute place v de k, quitte à remplacer M_v par M'_v.

Le théorème principal de la théorie de la descente ([CTSa3] ; [CTSk] Prop. 1.3 ; [Sk] Thm. 6.1.2) montre qu'il existe un torseur universel $\mathcal{T}_0$ sur X, i.e. un torseur de type id : $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ et une adèle $\{N_v\} \in \mathcal{T}_0(\mathbb{A}_k)$ qui se projette sur $\{M_v\}$ par la flèche structurale $\mathcal{T}_0 \to X$.

Pour le torseur universel $\mathcal{T}_0$, on a $\overline{k}^* = \overline{k}[\mathcal{T}_0]^*$ et $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{T}}_0) = 0$ ([CTSa3], Prop. 2.1.1), a fortiori $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{T}}_0)) = 0$. On a donc $\mathrm{Br}_0(\mathcal{T}_0) = \mathrm{Br}_1(\mathcal{T}_0)$. (En utilisant [HaSk], on peut montrer le résultat plus précis $\mathrm{Br}_0(\mathcal{T}_0) = \mathrm{Br}(\mathcal{T}_0)$, mais on n'a pas besoin de cet énoncé pour la démonstration qui suit.)

Avec les notations du diagramme principal du §2, on a ici $\mathbb{Z}_P = \mathbb{Z}^2$ et donc $\widehat{T} \otimes \mathbb{Z}_P = \widehat{T}^2$. Le Γ_k-homomorphisme $\widehat{T}^2 \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) = \widehat{T}_0$ se dualise en un homomorphisme de k-tores $T_0 \to T^2$. Soit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \times^{T_0} T^2$ le torseur sur X sous T^2 obtenu par changement de groupe.

Soit $\{P_v\} \in \mathcal{T}_1(\mathbb{A}_k)$ l'image de $\{N_v\} \in \mathcal{T}_0(\mathbb{A}_k)$ via la projection naturelle

$\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$. Par fonctorialité de l'accouplement de Manin, cette projection envoie $\mathcal{T}_0(\mathbb{A}_k) = \mathcal{T}_0(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1}$ (cette dernière égalité provenant de $\mathrm{Br}_0(\mathcal{T}_0) = \mathrm{Br}_1(\mathcal{T}_0)$) dans $\mathcal{T}_1(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1}$.

En résumé : l'adèle $\{P_v\} \in \mathcal{T}_1(\mathbb{A}_k)$ est orthogonale à $\mathrm{Br}_1(\mathcal{T}_1)$, pour chaque v, on a $P_v \in \mathcal{T}_{1,U}(k_v)$, et P_v a pour image M_v par la projection $\mathcal{T}_{1,U} \to U$.

La description locale des torseurs ([CTSa3], Thm. 2.3.1 p. 421 ; [Sk], Thm. 4.3.1), les deux lignes supérieures du diagramme (2) (avec $\hat{T}\otimes\mathbb{Z}_P = \hat{T}^2$) jouant le rôle du diagramme (2.3.2) de [CTSa3] (resp. du diagramme (4.21) de [Sk]) (noter que $\mathrm{Pic}(\overline{U}) = 0$) montre que la restriction $\mathcal{T}_{1,U}$ de $\mathcal{T}_1$ au-dessus de l'ouvert $U \subset X$ est donnée par un système d'équations :

$$0 \neq \alpha t^a (t-1)^b = N_{K/k}(\mathbf{z}), \quad 0 \neq t = \beta_1 N_{K/k}(\mathbf{x}), \quad 0 \neq t-1 = \beta_2 N_{K/k}(\mathbf{y}),$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in k^*$ convenables et $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ variables dans K. Un changement de variables évident montre que $\mathcal{T}_{1,U}$ est k-isomorphe au produit de la sous-variété lisse $Y \subset \mathbf{A}_k^{2n}$ donnée par l'équation

$$\beta_1 N_{K/k}(\mathbf{x}) - \beta_2 N_{K/k}(\mathbf{y}) = 1, \quad N_{K/k}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad N_{K/k}(\mathbf{y}) \neq 0$$

avec $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ variables dans K, et de l'espace principal homogène E du tore T donné par l'équation

$$\alpha \beta_1^a \beta_2^b = N_{K/k}(\mathbf{z}'),$$

avec $\mathbf{z}'$ variable dans K.

Soit E^c, resp. Y^c, une k-compactification lisse de E, resp. Y. On peut prendre $E^c = E \times^T T^c$.

Le k-morphisme $q \colon \mathcal{T}_{1,U} \to E$ induit une application k-rationnelle de la k-variété lisse $\mathcal{T}_1$ vers la k-variété projective E^c. Une telle application est automatiquement définie sur un ouvert $W \subset \mathcal{T}_1$ contenant tous les points de codimension 1 de $\mathcal{T}_1$. Soit $\mathbf{a} \in \mathrm{Br}(E^c)$. L'élément $q^*(\mathbf{a}) \in \mathrm{Br}(\mathcal{T}_{1,U})$ appartient donc à $\mathrm{Br}(W) \subset \mathrm{Br}(\mathcal{T}_{1,U})$. Comme $\mathcal{T}_1$ est lisse sur un corps de caractéristique zéro, et que W contient tous les points de codimension 1 de $\mathcal{T}_1$, le théorème de pureté pour le groupe de Brauer ([Gr], Thm. 6.1 (c) et Cor. 6.2) assure que l'inclusion $\mathrm{Br}(\mathcal{T}_1) \subset \mathrm{Br}(W)$ est une égalité. Il existe donc $\mathbf{b} \in \mathrm{Br}(\mathcal{T}_1)$ tel que $\mathbf{b}_U = q^*(\mathbf{a}) \in \mathrm{Br}(\mathcal{T}_{1,U})$. Comme $\mathrm{Br}(E^c) = \mathrm{Br}_1(E^c)$ (cette égalité provenant du fait que T, et donc E est une variété géométriquement rationnelle), on a $q^*(\mathbf{a}) \in \mathrm{Br}_1(\mathcal{T}_{1,U})$, et donc $\mathbf{b} \in \mathrm{Br}_1(\mathcal{T}_1)$.

Comme l'adèle $\{P_v\}$ est orthogonale à $\mathrm{Br}_1(\mathcal{T}_1)$, on voit alors que l'adèle $\{q(P_v)\} \in E^c(\mathbf{A}_k)$ est orthogonale à $\mathrm{Br}_1(E^c) = \mathrm{Br}(E^c)$. On sait ([Sa], Cor. 8.13) que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour E^c, compactification lisse d'un espace principal homogène sous un k-tore. On a donc $E^c(k) \neq \emptyset$, et il existe $M_1 \in E(k)$ arbitrairement proche de $q(P_v)$ pour chaque $v \in \Sigma$.

Par ailleurs, sous l'hypothèse que le corps de nombres k est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, on sait ([HBSk]) que le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour Y^c. On peut donc trouver un point $M_2 \in Y(k)$ arbitrairement proche des images de $P_v \in \mathcal{T}_{1,U}(k_v) \simeq Y(k_v) \times E(k_v)$ par la première projection, ceci pour chaque $v \in \Sigma$. L'application composée $Y(k) \times E(k) \simeq \mathcal{T}_{1,U}(k) \to U(k)$ envoie alors le point (M_2, M_1) sur un k-point M de U proche de chaque M_v pour $v \in \Sigma$. $\square$

Corollaire 3.2 *Soit k le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Soient $\alpha \in k^*$ et $a, b \in \mathbb{N}$. Soit V la k-variété définie par*

$$\alpha t^a (t-1)^b = N_{K/k}(\mathbf{z}) \neq 0,$$

avec t variable dans k et $\mathbf{z}$ variable dans K, et soit $p\colon V \to \mathbf{A}^1_k$ le morphisme défini par t. Soit X^c une k-compactification lisse de V équipée d'un k-morphisme $p\colon X^c \to \mathbf{P}^1_k$ étendant p. Soit

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}(X^c) = \mathrm{Br}(X^c) \cap p^*(\mathrm{Br}(k(\mathbf{P}^1))) \subset \mathrm{Br}(k(X)).$$

a) Si K/k est cyclique, ou si a et b sont premiers entre eux, l'obstruction de Brauer-Manin verticale est la seule pour X^c, autrement dit : $X^c(k)$ est dense dans $X^c(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}(X^c)}$.

b) Si a et b sont premiers entre eux, et si K/k ne contient pas de sous-extension cyclique, alors le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X^c.

Il suffit de combiner le théorème 3.1 avec les corollaires 2.6 et 2.7. Le corollaire 2.6 donne d'ailleurs d'autres exemples où l'énoncé a) vaut.

Questions d'effectivité Comme on l'a mentionné au paragraphe 2, pour a, b et K/k arbitraires, on ne sait pas calculer explicitement le sous-groupe $\mathrm{Br}(X^c) \subset \mathrm{Br}(X)$. Le théorème 3.1 n'est donc pas effectif.

Sous l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux (hypothèse de [HBSk]), le théorème est effectif dans certains cas. Il en est ainsi lorsqu'on peut assurer $\mathrm{Br}(X^c)/\mathrm{Br}(k) = 0$, comme c'est le cas sous l'hypothèse du corollaire 3.2 b). La proposition 2.11 fournit d'autres cas où le calcul de $\mathrm{Br}(X^c)$ est possible. Les exemples suivant cette proposition donnent, par application du théorème 3.1 :

Corollaire 3.3 *Soit K un corps extension finie de $k = \mathbb{Q}$ de degré* 30, *et soit $\alpha \in k^*$. Le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour tout modèle projectif et lisse de la variété donnée par*

$$\alpha t^2 (t-1)^3 = N_{K/k}(\mathbf{z}).$$

Cet exemple est intéressant, car c'est en quelque sorte le premier cas de couple (a, b) pour lequel l'existence d'un point k-rationnel sur un modèle projectif et lisse de la variété définie par $\alpha t^a(t-1)^b = N_{K/k}(\mathbf{z})$ n'est pas automatique.

Pour $P(t)$ de la forme $\alpha t(t-1)$, il existe un point k-rationnel sur tout modèle projectif et lisse de U ([HBSk], §2, Rem. 1). La seule question à considérer est donc celle de l'approximation faible.

Corollaire 3.4 *Soit K un corps extension finie de $k = \mathbb{Q}$, de degré m ou $2m$, avec m impair. Soit $\alpha \in k^*$. Soit U la k-variété définie par les équations*

$$\alpha t(t-1) = N_{K/k}(\mathbf{z}) \neq 0.$$

Soit X le groupe fini $\mathrm{Ker}[H^1(k, \mathbb{Z}/m) \to H^1(K, \mathbb{Z}/m)]$. Pour $\chi \in X$, soit $\mathcal{A}_\chi = (t, \chi) \in \mathrm{Br}(k(t))$.

a) Il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que pour $v \notin S_0$, tout $\mathcal{A}_\chi$ s'annule sur $U(k_v)$.

b) Pour tout ensemble fini S de places de k, un point $\{P_v\} \in \prod_{v \in S} U(k_v)$ est dans l'adhérence de $U(k)$ si et seulement si on peut trouver des points $P_v \in U(k_v)$ pour $v \in S_0 \setminus S$ tels que pour tout $\chi \in X$, on ait

$$\sum_{v \in S_0} \mathcal{A}_\chi(P_v) = \sum_{v \in S_0} (t_v, \chi)_v = 0,$$

où $t_v = t(P_v)$ et $(t_v, \chi) \in \mathrm{Br}(k_v) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Le cas particulier $m = 3$ du corollaire ci-dessus avait été établi dans [CTSal], Thm. 6.2. Même dans ce cas, l'approximation faible ne vaut pas toujours, comme le montre un exemple de D. Coray ([CTSal] p. 541).

Le théorème 3.1, la proposition 2.12 et l'existence automatique d'un point rationnel sur un modèle projectif lisse ([HBSk], §2, Rem. 1) impliquent enfin le :

Corollaire 3.5 *Soit K un corps extension galoisienne finie de $k = \mathbb{Q}$, de groupe G, et soit $\alpha \in k^*$. Si tout caractère de G trivial sur les éléments d'ordre 2 de G est trivial, alors l'approximation faible vaut pour tout modèle projectif et lisse de la variété donnée par*

$$\alpha t(t-1) = N_{K/k}(\mathbf{z}).$$

L'hypothèse sur G est satisfaite dans les cas suivants : le groupe G est simple non cyclique ; le groupe G est engendré par ses éléments d'ordre 2, ce qui est le cas si G est un groupe symétrique, et aussi si G est un produit de groupes d'ordre 2.

Remerciements Cet article est issu de discussions lors de la conférence *Higher dimensional varieties and rational points* (Institut Alfréd Rényi, Budapest, septembre 2001). Nous en remercions les organisateurs. Nous remercions aussi le rapporteur pour sa lecture attentive du tapuscrit.

Bibliographie

[CF] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (ed.), *Algebraic number theory*, Academic Press, London and New York, 1967

[CTPest] J.-L. Colliot-Thélène, Points rationnels sur les fibrations, in *Higher dimensional varieties and rational points* (K. J. Böröczky, J. Kollár, T. Szamuely, ed.), Bolyai Society Math. Studies **12**, Springer, 2003.

[CTHaSk] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann)*, prépublication

[CTSal] J.-L. Colliot-Thélène et P. Salberger, *Arithmetic on some singular cubic surfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **58** (1989) 519–549

[CTSa1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977) 175–230

[CTSa2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications*, J. Algebra **106** (1987) 148–205

[CTSa3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*. II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492

[CTSk] J.-L. Colliot-Thélène and A. N. Skorobogatov, *Descent on fibrations over* $\mathbf{P}^1_k$ *revisited*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000) 383–393

[CTSD] J.-L. Colliot-Thélène et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. reine angew. Math. **453** (1994) 49–112

[Gr] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III : exemples et compléments, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Adv. Stud. Pure Math., **3**, Masson et North-Holland, 1968, pp. 88–188.

[HaSk] D. Harari and A. N. Skorobogatov, *The Brauer group of torsors and its arithmetic applications*, Max Planck Institut Preprint **33** (2002)

[HBSk] R. Heath-Brown and A. N. Skorobogatov, *Rational solutions of certain equations involving norms*, Acta Math. **189** (2002), 161–177

[Sa] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981) 12–80

[Sk] A.N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, 2001

[Vosk] V. E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, translated from the Russian manuscript by Boris Kunyavskiĭ, Translations of Mathematical Monographs, **179**, AMS, Providence, RI, 1998

Jean-Louis Colliot-Thélène,
C.N.R.S., U.M.R. 8628,
Mathématiques, Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay, France
e-mail : colliot@math.u-psud.fr
web : www.math.u-psud.fr/∼colliot

David Harari,
D.M.A., E.N.S.,
45 rue d'Ulm,
F-75005 Paris, France
e-mail : harari@dma.ens.fr

Alexei N. Skorobogatov,
Department of Mathematics,
Imperial College,
180 Queen's Gate,
London SW7 2BZ, United Kingdom
e-mail : a.skorobogatov@ic.ac.uk